

SUR UN MODÈLE DE TYPE
BORGNAKKE–LARSEN CONDUISANT À DES
LOIS D'ÉNERGIE NON–LINÉAIRES EN
TEMPÉRATURE POUR LES GAZ PARFAITS
POLYATOMIQUES

Laurent Desvillettes
UNIVERSITE D'ORLEANS
Département de Mathématiques
BP 6759
45067 Orléans Cedex 2

November 3, 2000

Abstract

Nous généralisons la classe de modèles de type Borgnakke–Larsen introduits dans [Bg, De, LT, Pe] pour obtenir une expression de l'énergie interne d'un gaz parfait qui soit aussi générale que possible.

1 Introduction

Les problèmes de rentrée dans la haute atmosphère de véhicules spatiaux ont conduit à l'étude, en particulier numérique, de l'équation de Boltzmann (Cf. [Ce], [Ch, Co], [Tr, Mu]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad (1.1)$$

où $f(t, x, v)$ est la densité de particules qui au temps t et au point x possèdent la vitesse v , et Q est un noyau de collision quadratique qui vérifie le théorème H de Boltzmann:

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(v) \log f(v) dv \leq 0. \quad (1.2)$$

Dans des simulations réalistes, cette modélisation s'avère néanmoins insuffisante et il faut introduire les degrés d'énergie interne dus au fait que O_2 et N_2 sont des molécules diatomiques.

Les modèles de Boltzmann correspondants, même s'ils ne décrivent pas forcément le détail des processus physiques, doivent permettre de récupérer à la limite macroscopique des lois d'énergie interne autres que la loi des gaz parfaits monoatomiques:

$$e = \frac{3}{2} \rho T, \quad (1.3)$$

où e est l'énergie interne, ρ la densité et T la température du gaz.

De plus, on souhaite dans une telle modélisation n'introduire qu'un seul paramètre supplémentaire, l'énergie interne $I^2 \in \mathbb{R}_+$ d'une molécule, ce qui permet de ne pas surcharger la capacité-mémoire des ordinateurs, et de garder des temps de calcul raisonnables.

Enfin, on veut un modèle pour lequel on puisse démontrer rigoureusement un analogue du théorème H (1.2).

Ce programme a été mis en oeuvre dans [Bg, De, LT, Pe] pour le cas particulier où la loi d'énergie interne du gaz est linéaire en T :

$$e = \alpha \rho T, \quad (1.4)$$

avec $\alpha > \frac{3}{2}$.

Nous proposons dans cette note un modèle qui généralise celui de [Bg, De, LT, Pe] et permet, tout en satisfaisant aux contraintes énoncées précédemment, d'obtenir à la limite macroscopique des lois d'énergie de la forme

$$e = \rho \Phi(T), \quad (1.5)$$

pour des $\Phi > 0$ arbitraires.

2 Description du modèle

Le mécanisme de collision est celui de [Bg, De, LT, Pe], et est basé sur la procédure proposée par Borgnakke et Larsen (Cf. [Br, La]).

Les vitesses et énergies internes v, v_*, v', v'_* des particules après une collision sont liées aux quantités correspondantes avant la collision grâce aux équations suivantes:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{4}|v - v_*|^2 + I^2 + I_*^2, \quad (2.1)$$

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + R \epsilon |v - v_*|^{-1} \{v - v_* - 2\omega \cdot (v - v_*) \omega\}, \quad (2.2)$$

$$v'_* = \frac{v + v_*}{2} - R \epsilon |v - v_*|^{-1} \{v - v_* - 2\omega \cdot (v - v_*) \omega\}, \quad (2.3)$$

$$I'^2 = r(1 - R^2) \epsilon^2, \quad (2.4)$$

$$I_*'^2 = (1 - r)(1 - R^2) \epsilon^2, \quad (2.5)$$

et $\omega \in S^2, r, R \in [0, 1]$.

Le noyau de Boltzmann correspondant prend alors la forme

$$\begin{aligned} Q(f)(v, I) = & \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} \int_{\omega \in S^2} \int_{r, R \in [0, 1]} \{f(v', I') f(v'_*, I'_*) \\ & - f(v, I) f(v_*, I_*)\} B(v, v_*, I, I_*, \omega, r, R) R(1 - R^2) dR dr d\omega \frac{I}{\phi(I)} I_* dI_* dv_*, \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} B(v, v_*, I, I_*, \omega, r, R) = & \tilde{B}(\epsilon, R |v - v_*|, \\ & R |(v - v_*) \cdot \omega|, I^2 r(1 - R^2), I_*^2 (1 - r)(1 - R^2), (I^2 + I_*^2)(1 - R^2)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

La fonction ϕ peut être choisie arbitrairement, elle est liée à la loi d'énergie (1.5) par une relation que nous explicitons en (4.3) – (4.6).

3 Théorème H

Nous démontrons ici l'analogie pour notre modèle du théorème H de Boltzmann pour les gaz monoatomiques décrit en (1.2). La mesure dv est remplacée par $\phi(I) dI dv$. On peut écrire la propriété suivante:

Théorème 1: *Pour toute fonction $f(v, I) > 0$ pour laquelle les intégrales ont un sens, on a*

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) \log f(v, I) \phi(I) dI dv \leq 0, \quad (3.1)$$

et

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) \left(\begin{array}{c} 1 \\ v_i \\ \frac{|v|^2}{2} + I^2 \end{array} \right) \phi(I) dI dv = 0. \quad (3.2)$$

De plus,

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) \log f(v, I) \phi(I) dI dv = 0 \quad (3.3)$$

si et seulement si $f(v, I)$ est une fonction Maxwellienne.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la propriété suivante:

Théorème 2: *Pour toute fonction $f(v, I) > 0$ et toute fonction $q(v, I)$ pour lesquelles les intégrales ont un sens, on a*

$$\begin{aligned} & \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) q(v, I) \phi(I) dI dv \\ &= \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{I_* \in \mathbb{R}_+} \int_{\omega \in S^2} \int_{r, R \in [0, 1]} \{f(v', I') f(v_*, I_*) \\ & \quad - f(v, I) f(v_*, I_*)\} \times \{q(v, I) + q(v_*, I_*) - q(v', I') - q(v_*, I_*)\} \\ & \quad \times B R^2 (1 - R^2) dR dr d\omega II_* dI dI_* dv dv_*. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ce théorème est lui-même une conséquence de la propriété suivante:

Théorème 3: *Si l'on définit R' et r' dans $[0, 1]$ en posant*

$$I^2 + I_*^2 = (1 - R'^2) \epsilon^2, \quad (3.5)$$

$$I^2 = r' (1 - R'^2) \epsilon^2, \quad (3.6)$$

par symétrie avec (2.4), (2.5), alors on a l'invariance de mesure suivante:

$$dv dv_* II_* dI dI_* dr R^2 (1 - R^2) dR d\omega = dv' dv'_* I' I'_* dI' dI'_* dr' R'^2 (1 - R'^2) dR' d\omega. \quad (3.7)$$

De plus,

$$B(v, v_*, I, I_*, \omega, r, R) = B(v', v'_*, I', I'_*, \omega, r', R'). \quad (3.8)$$

Le théorème 3 est une conséquence simple de l'équation (15) de [Bg, De, LT, Pe].

4 La loi d'énergie

L'équation d'Euler associée au modèle dont le noyau de collision est donné par (2.7) s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} f(t, x, v, I) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{|v|^2}{2} + I^2 \end{pmatrix} \phi(I) dI dv \\ & + \operatorname{div}_x \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} f(t, x, v, I) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{|v|^2}{2} + I^2 \end{pmatrix} v \phi(I) dI dv = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

La loi d'énergie s'écrit alors

$$e = \rho \Phi(T), \quad (4.2)$$

et Φ est reliée à ϕ par la formule

$$\Phi(T) = \frac{3}{2} T + \frac{\int_{I \in \mathbb{R}_+} \phi(I) I^2 e^{-\frac{I^2}{T}} dI}{\int_{I \in \mathbb{R}_+} \phi(I) e^{-\frac{I^2}{T}} dI}. \quad (4.3)$$

La fonction Φ étant en fait celle qui est mesurée expérimentalement, il est important de pouvoir inverser la formule (4.3). On peut en fait écrire

$$\phi(x) = \sqrt{x} Lg(x), \quad (4.4)$$

où L est la transformée de Laplace inverse, et

$$g(x) = \exp h(x), \quad (4.5)$$

où h est une primitive de

$$\tau \rightarrow \frac{3}{2\tau} - \Phi\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (4.6)$$

Références

[Bg, De, LT, Pe] J-F. Bourgat, L. Desvillettes, P. Le Tallec, B. Perthame, *Microreversible Collisions for Polyatomic Gases and Boltzmann's Theorem*, Eur. J. Mech., B/ Fluids, **13**, n. 2, (1994), 237–254.

[Ce] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, Berlin, (1988).

[Ch, Co] S. Chapman, T.G. Cowling, *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge Univ. Press., London, (1952).

[Tr, Mu] C. Truesdell, R. Muncaster, *Fundamentals of Maxwell kinetic theory of a simple monoatomic gas*, Acad. Press., New York, (1980).