ANALYSE FONCTIONNELLE

ENS Cachan 2015-16

1 Exemples importants d'espaces fonctionnels

1.1 Rappels de topologie

1.1.1 Topologie générale

Définition: Dans un ensemble E, on appelle topologie un ensemble de parties de E dénommées *ouverts* et vérifiant les axiomes suivants:

- $\emptyset$ et E sont ouverts,
- Une union quelconque d'ouverts est un ouvert,
- Une intersection de deux (ou, de manière équivalente, d'un nombre fini d') ouverts est un ouvert.

On appelle espace topologique un ensemble E muni d'une topologie.

Définition: Une base d'ouverts d'un espace topologique E est un ensemble de parties ouvertes de E dont les unions quelconques permettent de retrouver tous les ouverts.

Exemple: Les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$ forment une base d'ouverts de la topologie naturelle de $\mathbb{R}^N$. Les mêmes boules, mais centrées sur les points à coordonnées rationnelles, et de rayon rationnel, forment une base dénombrable d'ouverts de la même topologie.

Proposition: Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties d'un ensemble E (contenant l'ensemble vide) qui recouvrent E et qui contient, pour toute intersection donnée de deux élements de $\mathcal{B}$ et tout point x de cette intersection, un ensemble inclus dans l'intersection en question et dont x est élément, est une base d'ouverts de la topologie (dite topologie engendrée par cette base) formée des unions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$.

En particulier un ensemble de parties (contenant l'ensemble vide) qui recouvrent E et qui est stable par intersections finies est une base d'ouverts pour la topologie qu'il engendre.

Preuve: On observe que l'intersection de deux unions quelconques de parties est (par distributivité) une union quelconque d'intersections de parties, ce qui permet de montrer que les ouverts construits sont bien stables par intersection finie.

Exemples: La topologie dont les ouverts sont $\emptyset$ et E est appelée grossière, celle dont les ouverts sont toutes les parties de E est appelée discrète.

Pour un ensemble E infini, on appelle topologie cofinie celle qui est formée des ensembles dont le complémentaire est fini (on y adjoint l'ensemble vide). Pour un ensemble E non-dénombrable, on appelle topologie codénombrable celle qui est formée des ensembles dont le complémentaire est dénombrable (on y adjoint l'ensemble vide).

Lorsque E est muni d'un ordre total $\leq$, on peut le munir d'une topologie dont une base d'ouvert (stable par intersection finie) est formée des "intervalles ouverts" du type $]a,b[:=\{x \in E, \quad a<x<b\}$, y compris non bornés $]-\infty,b[:=\{x \in E, \quad x<b\}$, $]a,+\infty[:=\{x \in E, \quad a<x\}$ (pour tous $a,b \in E$ tels que $a<b$), et $]-\infty,\infty[:=E$. Cette topologie est dite topologie de l'ordre.

Définition: Le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans une partie A de E (i.-e. l'union de tous les ouverts contenus dans A, qui est ouverte) est appelé intérieur de A et noté A°.

On appelle fermé le complémentaire d'un ouvert. Le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant une partie A de E (i.-e. l'intersection de tous les fermés contenant A, qui est fermée) est appelé adhérance de A et noté $\bar{A}$. Une partie dont l'adhérance est l'espace E tout entier est dite dense.

Propriétés: Pour tout ensemble A d'un espace topologique E, on a $\overline{(\bar{A})}=\bar{A}$, et $(A^\circ)^\circ=A^\circ$. Un ensemble A de E est fermé si et seulement si $\bar{A}=A$, et ouvert si et seulement si $A^\circ=A$.

Définition: Pour $x_0 \in E$ espace topologique, on dit que $V \subset E$ est un voisinage de x_0 (pour la topologie concernée) lorsque l'on peut trouver un ouvert U de E contenant x_0 et inclus dans V. On note parfois $\mathcal{V}_{x_0}$ l'ensemble des voisinages de x_0.

Une base de voisinages d'un point x_0 est un ensemble de voisinages de x_0 dont un élément est inclus dans chaque voisinage de x_0.

Propriétés: On considère un espace topologique donné.

Les ouverts sont les ensembles qui sont voisinages de chacuns de leur point.

Les parties appartenant à une base d'ouverts qui contiennent un point x_0 donné forment une base de voisinages de ce point.

Réciproquement, si pour tout point x de E, le sous-ensemble des éléments d'une famille B de parties de E qui contiennent x est une base de voisinages de x, alors B est une base d'ouverts.

L'adhérance d'une partie A est formée des points x tels que tout voisinage de x rencontre A.

Preuve: Soit $x \in \overline{A}$ et V voisinage de x (que l'on peut supposer ouvert). Si $V \cap A = \emptyset$, alors $A \subset V^c$ qui est fermé, donc $x \in V^c$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que V est un voisinage de x. Réciproquement, si $V \cap A \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de x, et si F est un fermé contenant A, alors $x \in F$. En effet si $x \in F^c$ (ouvert), alors $F^c \cap A \neq \emptyset$, ce qui est impossible car F contient A. Comme x est élément de tous les fermés contenant A, il est élément de $\bar{A}$.

Exemple: Les boules centrées en $x_0 \in \mathbb{R}^N$ forment une base de voisinages de x_0 pour la topologie naturelle de $\mathbb{R}^N$. Parmi ces boules, celles dont le rayon est rationnel forment une base dénombrable de x_0 pour cette même topologie.

Définition: On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E espace topologique converge vers un point x de E lorsque pour tout voisinage V de x, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_0$, x_n appartient à V. On dit qu'elle admet x comme valeur d'adhérance lorsque pour tout voisinage V de x, et $N_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N_0$ tel que x_n appartient à V. En d'autres termes, les éléments de la suite correspondant à tous les indices de $\mathbb{N}$ sauf un nombre fini d'entre eux appartiennent à V en cas de convergence, et les éléments de la suite correspondant à une infinité d'indices de $\mathbb{N}$ appartiennent à V en cas de valeur d'adhérance.

Propriétés: Dans la définition précédente, on peut remplacer l'ensemble de tous les voisinages par une base de voisinages.

Les limites (et les valeurs d'adhérances) d'une suite d'éléments d'une partie A de E appartiennent à $\bar{A}$.

Preuve: C'est une conséquence de la caractérisation de l'adhérance de A comme ensemble des points dont tout voisinage a une intersection non vide avec A.

Remarques: *Attention* néanmoins: l'adhérance d'un ensemble n'est pas caractérisée par cette propriété dans les espaces topologiques généraux (elle l'est si tous les points possèdent une base dénombrable de voisinages). De même dans une partie fermée, les limites de suites de points de cette partie sont également dans cette partie, mais cela ne constitue pas une caractérisation des parties fermées.

Définition: Un espace topologique E est dit séparé lorsque pour $x, y \in E$ distincts, il existe deux ouverts U, V disjoints ($U \cap V = \emptyset$) tels que $x \in U$, $y \in V$.

Propriété: Dans un espace topologique séparé, une suite admet au plus une limite.

Remarque: Il y a des topologies non séparées: dans celles-ci, il peut exister des suites qui ont plusieurs limites distinctes. Par exemple la topologie grossière (formée de $\emptyset$ et E) est toujours non-séparée (pour des ensembles ayant au moins deux éléments...) et toutes les suites y sont convergentes vers tous les points de E! De même la topologie cofinie sur un ensemble infini n'est pas séparée. Pour cette topologie sur $\mathbb{N}$, la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers tout élément de $\mathbb{N}$.

La plupart des topologies utilisées en pratique sont séparées: c'est en particulier le cas des topologies métrisables (cf. suite du polycopié), et en particulier des topologies de (parties d') espaces normés, car deux points distincts x et y dans un tel espace sont éléments des boules (centrées sur eux) de rayon $d(x, y)/3$. Chaque fois qu'on introduira une topologie non métrisable, on s'intéressera à son caractère séparé ou non.

Remarque: *Attention*, la présence d'une valeur d'adhérance pour une suite entraîne l'existence d'une sous-suite convergente lorsque E admet en tout point (ou en tout cas au point qui est la valeur d'adhérance) une base dénombrable de voisinages, mais pas en général: c'est un handicap considérable des topologies dont les points (ou des points) n'admettent pas une base dénombrable de voisinages, car les propriétés de compacité d'une partie de E ne permettent pas en général l'extraction d'une sous-suite à partir d'une suite de cette partie de E. En anglais, les espaces topologiques dont tous les points admettent une base dénombrable de voisinages sont parfois appelés “first countable”, ceux qui admettent une base dénombrable d'ouverts sont dits “second countable”. On verra que dans les espaces métriques, cette dernière propriété est équivalente à l'existence d'une partie dénombrable dense (on dit d'un espace possédant cette dernière propriété qu'il est séparable).

Remarque: La donnée des ouverts, ou bien des fermés, ou bien des voisinages de tous les points, ou bien d'une base d'ouverts, ou bien d'une base de voisinages de tous les points, ou même de l'ensemble des adhérances de tous les sous-ensembles, caractérisent une topologie. *Attention*, par contre deux topologies différentes peuvent avoir les mêmes suites convergentes (c'est en particulier le cas pour la convergence forte et la convergence faible des distributions).

Définition: Soit E et F des espaces topologiques, f une application de E dans F, et $x_0 \in E$. On dit que f est continue en x_0 lorsque pour tout voisinage W (dans F) de $f(x_0)$, il existe un voisinage V (dans E) de x_0 tel que $f(V) \subset W$. Une application continue en chaque point est dite continue. On appelle homéomorphisme une bijection continue dont la réciproque est également continue.

Propriétés: Une application entre espaces topologiques E et F est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est ouvert (resp. fermé), et si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\,\overline{A}\,) \subset \overline{f(A)}$.

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers un point x de E, et si f est une application continue de E dans F (ces espaces étant munis d'une topologie) alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F converge vers $f(x)$ dans F.

Enfin une composée de fonctions continues est encore continue.

Preuve: Soit $f : E \to F$ continue, et U ouvert de F. Si $x_0 \in f^{-1}(U)$, alors $f(x_0) \in U$, si bien que U est un voisinage de $f(x_0)$ dans F. Soit V un voisinage de x_0 dans E tel que $f(V) \subset U$. Alors $V \subset f^{-1}(U)$, qui est donc un voisinage de x_0 dans E. On en déduit que $f^{-1}(U)$ est ouvert comme voisinage de chacuns de ses points.

Remarque: *Attention*, dans les espaces topologiques généraux, si une application f de E dans F vérifie $f(x_n) \to f(x)$ dans F pour toute suite vérifiant $x_n \to x$ dans E, elle n'est pas nécessairement continue (cela est néanmoins vrai si tout point de E possède une base dénombrable de voisinages).

Définition: Lorsque A est une partie d'un espace topologique E (muni d'une topologie $\mathcal{T}$), on construit une topologie (notée $\mathcal{T}_A$) sur A en considérant comme ouvert de A toute intersection de A avec un ouvert de E.

Propriétés: Une partie d'un espace topologique E séparé est séparée pour la topologie induite.

Les fermés de A sont les intersections de A avec les fermés de E.

Toute partie $O \subset A$ ouverte (resp. fermée) pour la topologie de E est ouverte (resp. fermée) pour la topologie de A. La réciproque est vraie lorsque A est ouverte (resp. fermée) dans E. On peut trouver des exemples qui illustrent ces propriétés avec la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Preuve: Soit F un fermé de E. Comme $A-(F\cap A)=(E-F)\cap A$, on voit que $F\cap A$ est un fermé de A. Réciproquement soit F un fermé de A. Alors $A-F=A\cap U$, où U est un ouvert de E. Donc $F=A-(A-F)=A-(A\cap U)=A\cap(E-U)$, c'est donc l'intersection de A et d'un fermé de E.

Si $O \subset A$ est ouverte (resp. fermée) pour la topologie de E, alors comme $O=O\cap A$, elle l'est encore pour la topologie induite sur A.

Si A est ouverte (resp. fermée) et si $O\subset A$ est ouverte (resp. fermée) pour la topologie induite sur A, alors $O=U\cap A$, où U est un ouvert (resp. fermé) de E. Donc O est un ouvert (resp. fermé) de E comme intersection finie d'ouverts (resp. fermés) de E.

Définition: On dit d'un espace topologique qu'il est compact lorsqu'il est séparé et que de tout recouvrement ouvert de cet espace, on peut extraire un sous-recouvrement fini (axiome de Borel-Lebesgue).

Remarques: Il est équivalent de dire que de toute intersection fermée vide, on peut extraire une sous-intersection finie vide. Dans la tradition anglo-saxonne, la séparation de l'espace ne fait pas partie de la définition d'un espace compact. On a équivalence entre la définition de "Espace compact" et "Hausdorff (séparé) compact space". Réciproquement, la traduction en français de "compact space" est "espace quasi-compact" (ces espaces ne jouent pas de rôle significatif en analyse).

Une partie d'un espace topologique séparé est dite compacte quand de tout recouvrement ouvert de cette partie (dans l'espace ambient, donc avec des inclusions), on peut extraire un sous-recouvrement fini (dans l'espace ambient). On peut vérifier que cela est équivalent au fait que l'espace topologique induit sur la partie considérée est compact en tant qu'espace topologique autonome.

Proposition: Lorsque E est un espace topologique compact, $A\subset E$ est compact si et seulement si A est fermé dans E (plus généralement, si E est séparé, ses parties compactes sont fermées).

Preuve: Soit A fermé dans E compact, et une famille de fermés d'intersection vide de A. Alors c'est également, une famille de fermés d'intersection vide de E, et on peut donc en extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Supposant maintenant que A est compacte dans E séparé. Soit $y \in A^c$. On peut trouver par séparation pour tout $x \in A$ des ouverts disjoints O_x et U_x tels que $x \in O_x$ et $y \in U_x$. Comme $A \subset \cup_{x \in A} O_x$, on en déduit que $A \subset \cup_{i=1,..,N} O_{x_i}$ pour une certaine famille finie $\{x_1, .., x_N\}$ de E. Mais alors $\cap_{i=1,..,N} U_{x_i}$ est un voisinage de y qui a avec A une intersection vide. Donc $y \notin \overline{A}$, si bien que A est fermée.

Proposition: Dans un espace compact, toute suite admet une valeur d'adhérance ("axiome de Bolzano-Weierstrass") [mais pas toujours une sous-suite convergente!].

Preuve: Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E. On considère la suite décroissante de fermés définie par $F_n = \overline{\{y_p,\, p \geq n\}}$. Si celle-ci était d'intersection vide, on aurait par compacité $F_n = \emptyset$ pour un certain n, ce qui est impossible. On peut donc trouver $l \in E$ appartenant à tous les F_n. Par utilisation du critère d'appartenance à l'adhérance (basé sur les voisinages), on voit que pour tout n et $V \in \mathcal{V}_l$, $V \cap \{y_p,\, p \geq n\} \neq \emptyset$. On en déduit que l est bien une valeur d'adhérance de la suite.

Remarque: La réciproque est fausse en général.

Proposition: Lorsque les topologies sont séparées (en fait celle de l'espace d'arrivée), l'image d'un ensemble compact par une application continue est un ensemble compact. Si une application continue d'un compact à valeur dans un espace séparé est bijective, alors sa réciproque est également continue.

Preuve: On vérifie directement avec la propriété de Borel-Lebesgue la première partie: soit K un compact et $f(K) \subset \cup_{i \in I} O_i$, avec O_i ouvert de F espace d'arrivée. Alors $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \cup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$, donc $K \subset \cup_{k=1,..,N} f^{-1}(O_{i_k})$. On en déduit que $f(K) \subset f(\cup_{k=1,..,N} f^{-1}(O_{i_k})) = \cup_{k=1,..,N} f(f^{-1}(O_{i_k})) \subset \cup_{k=1,..,N} O_{i_k}$.

La continuité de la réciproque est due au fait que dans un ensemble compact, les parties compactes sont les parties fermées.

Définition: Un espace topologique est dit localement compact lorsque tout point y admet un voisinage compact. Une partie d'un espace topologique est dite relativement compacte lorsque son adhérance dans cet espace est compacte.

Définition: On dit d'une topologie qu'elle est moins fine qu'une autre lorsqu'elle comporte moins d'ouverts (ou de manière équivalente, moins de fermés, ou bien encore moins de voisinages). La relation d'ordre "moins fine que" sur les topologies de E n'est autre que la relation d'inclusion sur les parties de $\mathcal{P}(E)$.

Une intersection (quelconque) de topologies est encore une topologie (constituée des ensembles qui sont ouverts dans toutes les topologies dont on prend l'intersection), on peut donc parler de la topologie la moins fine vérifiant une propriété donnée (c'est l'intersection de toutes les topologies vérifiant cette propriété).

Exemple: Lorsque l'on dispose d'une famille $\mathcal{T}_i$ de topologies ($i \in I$) sur des espaces F_i, et d'applications f_i de E dans F_i, on peut munir de cette manière E de la topologie (notée $\mathcal{T}$, et dite topologie initiale) la moins fine rendant les f_i continues.

Proposition: Une base d'ouverts de cette topologie est alors formée par les intersections finies d'ensembles $f_i^{-1}(U_i)$, où les U_i sont des ouverts de F_i pour la topologie $\mathcal{T}_i$ (les ouverts sont donc les unions quelconques d'intersections finies de tels ensembles). Dans cette topologie $\mathcal{T}$, $x_n \to x$ si et seulement si (pour tout $i \in I$) $f_i(x_n) \to f(x)$ dans F_i pour la topologie $\mathcal{T}_i$.

Preuve: Si $x_n \to x$, alors $f_i(x_n) \to f_i(x)$ car les f_i sont continues.

Réciproquement, si pour tout $i \in I$, $f_i(x_n) \to f_i(x)$, alors soit V un voisinage de x pour $\mathcal{T}$, il contient un ensemble du type $\cap_{k=1}^{P} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, où $f_{i_k}(x) \in U_{i_k}$. Comme $\exists N_{0k} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{0k}, \quad f_{i_k}(x_n) \in U_{i_k}$, on prend $n \geq \sup(N_{01}, .., N_{0P})$, si bien que $x_n \in \cap_{k=1}^{P} f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$.

Exemple: Lorsque $E = \prod_{i\in I} E_i$ est un produit d'espaces topologiques (i.-e. chacun des E_i est muni d'une topologie $\mathcal{T}_i$), on définit sa topologie (notée $\mathcal{T}$) comme la moins fine qui rende les applications coordonnées [i.-e. les $p_j : \prod_{i\in I} E_i \to E_j$ qui à $(x_i)_{i\in I}$ associent x_j], continues.

Remarque: Quand I est infini, les ouverts associés à cette topologie sont bien moins nombreux et bien plus gros que les simples produits d'ouverts, une base d'entre eux est en effet formée des produits $\prod_{i\in I} O_i$, où tous les O_i sauf un nombre fini d'entre eux sont égaux à E_i, et où le reste (un nombre fini) sont des ouverts de E_i. Dans cette topologie, une suite $((x_i)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x_i)_{i\in I}$ si et seulement si $x_i^n \mapsto x_i$ pour tout $i \in I$ (i.-e. si on a convergence de chacunes des coordonnées). On voit qu'on retrouve donc la définition usuelle de la topologie associée à un produit fini d'espaces métriques.

Exemple: Lorsqu'on identifie l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications d'un ensemble X vers un espace topologique E (muni d'une topologie $\mathcal{U}$) avec le produit $E^X = \prod_{x\in X} E$, on voit que la topologie produit est celle qui permet de définir la convergence simple des applications. En d'autres termes, $f_n \mapsto f$ si et seulement si pour tout $x \in X$, $f_n(x) \mapsto f(x)$.

On admet la propriété suivante (conséquence de l'axiome du choix, et basée sur la notion d'ultrafiltres, que l'on ne présente pas dans ce cours):

Proposition: Un produit (quelconque) d'espaces compacts est compact.

Remarque: L'extraction diagonale permet de vérifier que la propriété de Bolzano-Weierstrass est vraie pour les produits dénombrables d'espaces métriques compacts. En effet, dans le produit $\prod_{k\in\mathbb{N}} E_k$, si l'on dispose d'une suite $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...)$, alors on commence par extraire une sous-suite $\sigma_1(n)$ telle que $x_1^{(\sigma_1(n))} \to x_1$, puis une seconde sous-suite $\sigma_1(\sigma_2(n))$ telle que $x_2^{(\sigma_1(\sigma_2(n)))} \to x_2$, puis, par récurrence, des sous-suites $\sigma_1(\sigma_2(...\sigma_k(n)..))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, telles que $x_k^{(\sigma_1(\sigma_2(...(\sigma_k(n)..)))} \to x_k$. On considère alors la suite obtenue par extraction diagonale

$$(x_1^{(\sigma_1(\sigma_2(...(\sigma_n(n)..))))}, x_2^{(\sigma_1(\sigma_2(...(\sigma_n(n)..))))}, ...).$$

Cette suite converge vers $(x_1, x_2, ...)$.

On vérifie ainsi la propriété de Bolzano-Weierstrass pour le produit. Cette propriété entraîne la compacité dans un espace métrique (cf. suite du polycopié).

Corollaire: On voit que si E est un espace topologique compact, alors toute suite de $\mathcal{F}(X, E)$ admet une valeur d'adhérance dans la topologie produit (i.-e. celle de la convergence simple).

Remarque: *Attention*, par contre elle n'a pas en général de sous-suite convergente, comme le montre l'exemple de la suite de fonctions $(\sin(n\,x))_{n\in\mathbb{N}}$, pour $x \in]0, 2\pi[$. En effet, si une telle sous-suite indexée par $\sigma(n)$ existait, sa limite serait nécessairement 0 p.p. d'après le lemme de Riemann-Lebesgue (cf. suite du polycopié). Mais alors la suite $(\sin(\sigma(n)\, x)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait également vers 0 p.p., ce qui est impossible (il suffit d'en prendre l'intégrale sur $]0, 2\pi[$ pour s'en convaincre).

On en déduit que $\mathcal{F}(]0, 2\pi[, [0, 1])$ (muni de la convergence simple) n'est pas à base dénombrable de voisinages.

Remarque: *Attention*, les notions de suite de Cauchy, de complétude, de fonctions uniformément continues, de précompacité (en anglais: uniform boundedness), de bornés, ne sont pas définies sur des espaces topologiques généraux. Elles le sont par contre sur les espaces métrisables, et par conséquent sur les espaces vectoriels munis d'une famille dénombrable de semi-normes (cf. suite du polycopié).

Remarque: *Attention*, comme on a pu le voir, la plupart des propriétés des espaces métriques concernant les ouverts, fermés, adhérances, intérieurs, voisinages, bases d'ouverts et de voisinages, fonctions continues en un point ou sur un ensemble, homéomorphismes, espaces compacts, sont encore valides dans les espaces topologiques séparés. Par contre les propriétés (plus précisément les caractérisations) concernant les suites convergentes et valeurs d'adhérance ne sont pas nécessairement conservées (le plus souvent, elles peuvent être remplaçées par des propriétés équivalentes pour une notion généralisant celle de suite: les filtres).

1.1.2 Espaces métriques

Définition: Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est appelée distance lorsque

- $$\forall f, g, h \in E, \qquad d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g),$$
- $$\forall f, g \in E, \qquad d(f, g) = d(g, f),$$
- $$\forall f, g \in E, \qquad d(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = g.$$

On note $B(x, r) = \{y, d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$ associée à d.

Proposition: Ces boules définissent une base d'ouverts d'une topologie séparée et à base dénombrable de voisinages. En particulier, les suites de E admettent au plus une limite, et les suites possédant une valeur d'adhérance admettent une sous-suite convergeant vers cette valeur d'adhérance.

Preuve: La propriété des bases d'ouverts est une conséquence de l'inégalité triangulaire. Il suffit ensuite de considérer les boules à rayon rationnel pour démontrer la dénombrabilité de la base de voisinages associée à chaque point.

Proposition: Pour tout $x \in E$, la fonction $d(x, \cdot) : E \to \mathbb{R}$ est continue, et même 1-Lipschitzienne au sens suivant:

$$\forall x, y, z \in E, \qquad |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

Les "boules fermées" $B'(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) \leq r\}$, sont fermées.

Définition: Un ensemble muni d'une distance est dit métrique. Un espace topologique dont la topologie peut être définie par une distance est dit métrisable.

Propriétés: Deux espaces métriques ayant les mêmes suites convergentes ont la même topologie. La continuité, l'adhérence d'une partie, la densité, le caractère fermé peuvent être caractérisées par des suites dans un espace métrique.

Définition: Dans un espace métrique, on dit qu'une partie est bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule. On dit qu'elle est précompacte lorsqu'elle est incluse dans une union finie de boules de rayons arbitrairement petits.

Définition: On appelle suite de Cauchy une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est telle que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p, q \geq N_0$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet.

Propriétés: Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est bornée, toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérance converge vers cette valeur d'adhérance. Une partie d'un espace métrique complet est complète lorsqu'elle est fermée.

Proposition: Dans un espace métrique, on a l'équivalence entre

- E est compact (i.-e. vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue),

- Toute suite de E admet une valeur d'adhérance (ou, ce qui est équivalent dans le cadre des espaces métriques, une sous-suite convergente): c'est l'axiome de Bolzano-Weierstrass,

- E est précompact et complet.

Preuve: On remarque qu'en vertu de la théorie des espaces compacts généraux, la première assertion entraîne la seconde (même quand l'espace n'est pas métrique, à condition de ne pas introduire de sous-suite).

La seconde entraîne la troisième car d'une part une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérance converge, et d'autre part la non-précompacité entraînerait l'existence d'une suite (construite par récurrence) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_p) \geq \delta$ pour $\delta > 0$ donné et tout $n, p \in \mathbb{N}$. Une telle suite ne peut avoir de valeur d'adhérance.

La troisième entraîne la seconde car étant donnée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E (supposé précompact et complet), on peut par précompacité trouver des points $y_{0i} \in E$, pour $i = 1, .., K_0$ tels que $E \subset \cup_{i=1}^{K_0} B(y_{0i}, 2^0)$, si bien que l'on peut trouver $i_0 \in \{1, .., K_0\}$ tel que $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in B(y_{0i_0}, 2^0)\}$ est un ensemble infini d'indices. Par précompacité toujours, on voit qu'il existe des points $y_{1i} \in E$, pour $i = 1, .., K_1$, tels que $B(y_{0i_0}, 2^0) \subset \cup_{i=1}^{K_1} [B(y_{1i}, 2^{-1}) \cap B(y_{0i}, 2^0)]$, si bien que l'on peut trouver $i_1 \in \{1, .., K_1\}$ tel que $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in B(y_{1i_1}, 2^{-1})\}$ est un ensemble infini d'indices.

Par récurrence, on obtient des points $y_{ki_k} \in E$, pour $i = 1, .., K_k$, tels que $B(y_{ki_k}, 2^{-k}) \subset \cup_{i=1}^{K_{k+1}} [B(y_{k+1,i}, 2^{-(k+1)}) \cap B(y_{ki}, 2^{-k})]$ et un point $y_{k+1,i_{k+1}}$ tel que $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in B(y_{k+1,i_{k+1}}, 2^{-(k+1)})\}$ est un ensemble infini d'indices.

On observe alors que la suite $(y_{k,i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente vers un élément $y \in E$ qui est une valeur d'adhérance de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin la seconde entraîne la première. On commence par remarquer que la propriété de Bolzano-Weierstrass entraîne l'existence d'un nombre de Lebesgue $r > 0$ pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$, i.-e. un nombre vérifiant que $\forall x \in E, \exists i(x) \in I, B(x, r) \subset O_{i(x)}$.

Si un tel nombre n'existait pas, on aurait en effet une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $B(x_n, 1/n)$ n'est inclus dans aucun O_i. Une telle suite convergerait à extraction près vers une limite qui appartient à un des O_i, ce qui conduit à une contradiction.

On conclut en utilisant la précompacité (avec le paramètre r) pour obtenir un recouvrement fini de X.

Proposition: Dans un espace métrique compact (muni d'une distance d), toute fonction continue à valeur dans un espace métrique (muni d'une distance δ) est uniformément continue, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \qquad d(x,y) \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Preuve: Si ce n'était pas le cas, ou pourrait trouver $\varepsilon > 0$ et des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(x_n, y_n) \leq 1/n, \qquad \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

En extrayant successivement des sous-suites convergentes de ces deux suites, on obtient une contradiction.

Définition: Un espace métrique dans lequel il existe une famille dénombrable dense est dit séparable.

Propriété: Dans un espace métrique, il y a équivalence entre séparabilité et existence d'une base dénombrable d'ouverts (second countability).

Preuve: Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts, on choisit $x_n \in O_n$. Soit $x \in E$ et V un voisinage de x, alors $V = \cup_{j\in J} O_{n_j}$, si bien que $x_{n_j} \in V$ pour tous les $j \in J$. Cette partie de la preuve n'utilise pas l'aspect métrique de l'ensemble.

Réciproquement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense, on considère $(B(x_n, 1/q))_{n\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}^*}$. Soit O un ouvert, et $y \in O$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset O$. Par densité, il existe $n(y) \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{n(y)}, y) < r/2$. Pour $q := q(y) > 2/r$ entier, on a $y \in B(x_{n(y)}, 1/q(y)) \subset O$. Finalement, $O = \cup_{y\in E} B(x_{n(y)}, 1/q(y))$.

1.1.3 Espaces vectoriels normés

Définition: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme $||\,||$ est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant

1. $$||x|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

2. $$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \qquad ||\lambda\, x|| = |\lambda|\, ||x||,$$

3. $$\forall x, y \in E, \qquad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

L'espace E muni de sa norme est appelé espace vectoriel normé.

Proposition: On rappelle que $d(f,g) = ||f - g||$ définit une distance sur E. On obtient donc les notions topologiques (ouverts, fermés, densité, connexes, compacts [définis par la propriété de Borel-Lebesgue], voisinages, limites et valeurs d'adhérance de suites, continuité, homéomorphismes), les notions uniformes (suites de Cauchy, complétude, continuité uniforme) ainsi que les bornés et les précompacts. On rappelle enfin que les convexes sont définis sur E indépendemment de toute norme ou topologie.

Remarque: On peut remarquer que les applications $(x,y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ et $(\lambda, x) \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \times E \mapsto \lambda\, x \in E$ sont continues (on rappelle que la topologie naturelle sur un produit fini d'espaces topologiques est la moins fine qui rende les applications coordonnées continues; on peut aussi définir sur $E \times F$ la norme $||(x,y)||_{E\times F} = ||x||_E + ||y||_F$, lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés).

Définition: Deux normes $||\,||_A$ et $||\,||_B$ sur E sont dites équivalentes lorsqu'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \qquad ||x||_A \leq C_1 ||x||_B \leq C_2\, ||x||_A.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur les normes. Des normes équivalentes définissent les mêmes notions topologiques, uniformes ainsi que les mêmes bornés et précompacts.

Rappel: Sur un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes les normes sont équivalentes. Cette propriété ne se généralise pas en dimension infinie. On peut ainsi montrer que l'espace l^∞ formé des suites bornées (réelles ou complexes) admet une infinité de normes non équivalentes deux-à-deux.

Rappel: On rappelle que pour deux espaces vectoriels normés $E, ||\,||_E$ et $F, ||\,||_F$, une application linéaire f est continue lorsqu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad ||f(x)||_F \leq C\, ||x||_E.$$

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. La quantité $|||f||| = \sup_{x \in B_{E,||\,||_E}(0,1)} ||f(x)||_F$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ (parfois dite norme subordonnée lorsque $E = F$ est de dimension finie). Lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}))$ l'ensemble des formes linéaires continues sur E: c'est le dual topologique de E. Pour $f \in E', x \in E$, on note $< f, x >$ plutôt que $f(x)$.

A retenir absolument: La définition des ouverts, fermés, voisinages; la définition de l'adhérance d'une partie pour un espace topologique; la définition des suites convergentes et des espaces topologiques séparés; la définition des fonctions continues; La définition et la caractérisation des ouverts des topologies initiales; tous les rappels sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés.

1.2 Espaces L^p, C^s et M^1

Rappel: Lorsque X est un ensemble muni d'une mesure positive μ, et $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p(X, d\mu)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies à un ensemble de mesure nulle près, telles que $\int |f|^p d\mu < +\infty$. Cet ensemble est un espace vectoriel normé lorsqu'il est muni de

$$||f||_{L^p(X,d\mu)} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

On note également $L^\infty(X, d\mu)$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies à un ensemble de mesure nulle près, telles que $\{|f| \geq C\}$ est de mesure nulle pour $C > 0$ assez grand (fonctions essentiellement bornées). On note $||f||_{L^\infty(X,d\mu)}$ l'inf des $C > 0$ vérifiant cette propriété: il s'agit de nouveau d'une norme.

Lorsque X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ muni de la restriction à X de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, on note $L^p(X)$ au lieu de $L^p(X, d\mu)$. Attention: les espaces de fonctions d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont parfois relatifs à une autre mesure, par exemple $L^p([0, +\infty[, r\,dr)$ joue un rôle important quand on s'intéresse aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ à symétrie radiale.

Lorsque X est un ensemble fini ou infini dénombrable (en particulier $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^N$), on note $l^p = L^p(X, d\mu)$ où μ est la mesure de comptage sur X: il s'agit donc d'un espace de suites lorsque $X = \mathbb{N}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la notation est cohérente avec la notation $||x||_p$.

Définition: Lorsque K est un compact de $\mathbb{R}^N$, on note $C(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K, muni de la norme de la convergence uniforme $||\,||_\infty$ (on pourra réflechir au lien entre cet espace et $L^\infty(K)$). Lorsque X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$, on considère parfois $C_b(X)$, ensemble des fonctions continues bornées sur X, muni de la même norme. On note $C_0(X)$ le sous-ensemble fermé de $C_b(X)$ défini comme adhérance des fonctions continues à support compact pour la norme uniforme (on pourra caractériser cet ensemble lorsque $X = \mathbb{R}^N$ ou un demi-espace ouvert de $\mathbb{R}^N$).

Définition: Pour Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $s \in \mathbb{N}$, on note $C^s(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions qui sont de classe C^s sur un ouvert U contenant $\overline{\Omega}$. On munit $C^s(\overline{\Omega})$ de la norme

$$||f||_{C^s(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq s} ||\partial_\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ici et dans la suite $\alpha = (i_1, .., i_N) \in \mathbb{N}^N$ est un multiindice. On note $|\alpha| = i_1 + .. + i_N$. Pour $x = (x_1, .., x_N)$, on note $x^\alpha = x_1^{i_1} .. x_N^{i_n}$, et $\partial_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{i_1} .. \partial_{x_N}^{i_N}}$.

Dans le cas d'un ouvert Ω, on considère plutôt l'ensemble $C_b^s(\Omega)$ des fonctions dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre s sont bornées, muni de la même norme.

Définition: On note $M^1(X)$ (espace des mesures signées [ou complexes], bornées) sur X le dual de $C_0(X)$, lorsque X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$.

Proposition: L'application $f \mapsto U_f$ qui va de $L^1(X)$ dans $M^1(X)$ et définie par $< U_f, \phi >= \int f\phi \, dx$ pour $\phi \in C_0(X)$ est une injection continue.

Preuve: C'est une conséquence des propriétés suivantes de densité issues de la théorie de la mesure: $C_c(X)$ est dense dans $L^p(X)$ pour $p \in [1, \infty[$ (et la norme $|| \, ||_{L^p}$); Si $f \in L^\infty(X)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_c(X)$ qui converge vers f presque partout, et qui de plus est uniformément bornée dans $L^\infty(X)$.

On peut donc identifier f avec la mesure $f \, dx$: cette identification se retrouvera dans la théorie des distributions.

Proposition: Lorsque $K \subset \mathbb{R}^N$ est un compact, on a la suite d'inclusion avec injection continue [en identifiant les fonctions continues à leur classe d'équivalence; attention d'ailleurs à ne pas confondre les fonctions continues presque partout et les fonctions égales presque partout à une fonction continue, comme le montre l'exemple de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^{-1}$ pour $x \neq 0$ et 0 pour $x = 0$]:

$$M^1(K) \supset L^1(K) \supset ... \supset L^p(K) \supset ... \supset L^2(K) \supset ...$$
$$... \supset L^{p'}(K) \supset ... \supset L^\infty(K) \supset C(K),$$

où $p \in [1, 2[$ et $p' = \frac{p}{p-1} > 2$. On a également la suite d'inclusion identique en remplaçant le compact K par un ouvert borné Ω, à condition de remplacer $C(K)$ par $C_b(\Omega)$.

De même, on introduit la suite d'inclusion avec injection continue:

$$C^\infty(K) \subset ... \subset C^s(K) \subset ... \subset C(K),$$

et une suite de même type sur un ouvert Ω quelconque, mais en remplaçant les C^s par des C^s_b.

L'introduction des espaces de Sobolev permet de "croiser" les deux suites d'inclusions (celle des L^p et celle des C^s).

A retenir absolument: La définition de L^p et sa norme; la définition de C^s et sa norme (sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$).

1.3 Distributions, Espaces de Sobolev

Définition: On note (pour $\Omega \subset R^N$ ouvert) $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C^\infty_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact sur Ω.

Définition-Proposition: On peut construire une fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ d'intégrale 1, positive, à support dans $\overline{B(0,1)}$. On appelle suite régularisante une suite de la forme $\phi_n(x) = n^N\,\phi(n\,x)$, ou ϕ est une fonction vérifiant les propriétés précédentes.

Preuve: On considère la fonction

$$\tilde{\phi} : x \mapsto \exp(-\frac{1}{1-|x|^2})\,1_{x\in B(0,1)}.$$

On prend ensuite

$$\phi = \frac{\tilde{\phi}}{||\tilde{\phi}||_{L^1(\mathbb{R}^N)}}.$$

Rappel: Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on peut définir $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (convolée de f et g) par la formule

$$(f*g)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^N} f(y)\,g(x-y)\,dy.$$

Plus généralement, si $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $p \in [1, +\infty]$, la même formule (ou la formule dans laquelle on a échangé f et g) permet de définir $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Proposition: L'opération $*$ est commutative et associative, et bilinéaire continue au sens suivant:

$$||f * g||_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Proposition: Soit $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $p \in [1, +\infty]$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^s(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in C^s(\mathbb{R}^N)$ et pour $|\alpha| \leq s$,

$$\partial_\alpha(f * g) = f * \partial_\alpha g.$$

Remarque: Si f, g sont deux fonctions (par exemple continues) à support compact, alors le support de $f * g$ est inclus dans l'adhérance de la somme des supports de f et de g (avec par définition, pour A, B parties de $\mathbb{R}^N$, $A + B = \{x + y, \qquad x \in A,\ y \in B\}$).

Proposition: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si $p \neq \infty$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour la norme $||\,||_{L^p}$. Pour f dans $L^\infty(\Omega)$, on peut trouver $(f_q)_{q\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ tel que $f_q \to f$ p.p, et $\sup_{q\in\mathbb{N}} ||f_q||_{L^\infty} < +\infty$.

De plus, si f est à support compact dans Ω et intégrable, alors (en notant $\tilde{f}$ la prolongée par 0 de f à $\mathbb{R}^N$) et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante, la fonction $\tilde{f} * \phi_n|_\Omega$ est de classe C^∞ et à support compact (indépendant de n) dans Ω pour n assez grand. Si $f \in L_c^p(\Omega)$ ($p \in [1, \infty[$), alors

$$\tilde{f} * \phi_n|_\Omega \mapsto_{n\to\infty} f$$

dans $L^p(\Omega)$. Si $f \in C_c(\Omega)$, la même suite converge uniformément (vers f). Enfin si $f \in L_c^\infty(\Omega)$, alors cette suite converge dans tous les $L^p(\Omega)$ ($p \in [1, \infty[$) vers f, et vérifie l'estimation $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\tilde{f} * \phi_n|_\Omega||_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.

Preuve: Commençons par considérer f à support compact dans Ω et intégrable. Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on sait que $\delta := d(Supp(f), \Omega^c) > 0$. On en déduit que pour $n \geq 2/\delta$, la fonction $\tilde{f} * \phi_n|_\Omega$ a son support dans le compact $\overline{Supp(f) + B(0, \delta/2)}$ de Ω. Elle est de plus C^∞ en vertu des propriétés de la convolution.

On s'intéresse tout d'abord au cas où $f \in C_c(\Omega)$. On observe que si $x \in \Omega$, et $n \geq 2/\delta$, alors

$$(\tilde{f} * \phi_n|_\Omega - f)(x) = \int_{B(0,1/n)} [f(x - y) - f(x)]\, \phi_n(y)\, dy$$

et donc
$$||\tilde{f} * \phi_n|_\Omega - f||_\infty \leq \sup_{a,b\in\Omega, |a-b|\leq 1/n} |f(a) - f(b)|.$$
On conclut avec l'uniforme continuité de f sur Ω.

On admet comme précédemment dans ce cours (il s'agit d'un résultat d'intégration) que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. (pour $|| \, ||_{L^p}$). Soit $f \in L^p_c(\Omega)$, et (pour $\varepsilon > 0$ fixé) $g_\varepsilon \in C_c(\Omega)$ vérifiant $||f - g_\varepsilon||_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon/3$. On note $\delta'_\varepsilon = d(\Omega^c,$ Supp $g_\varepsilon)$. Alors, pour $n \geq \sup(2/\delta, 2/\delta'_\varepsilon)$,

$$||\tilde{f}*\phi_n|_\Omega - f||_{L^p(\Omega)} \leq ||\tilde{g_\varepsilon}*\phi_n|_\Omega - g_\varepsilon||_{L^p(\Omega)} + ||(\tilde{f} - \tilde{g_\varepsilon})*\phi_n|_\Omega||_{L^p(\Omega)} + ||f - g_\varepsilon||_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq \frac{2}{3}\,\varepsilon + ||\tilde{g_\varepsilon} * \phi_n|_\Omega - g_\varepsilon||_{L^p(\Omega)}$$
et le dernier terme peut lui-même être majoré par $\varepsilon/3$ pour n assez grand d'après le résultat précédent.

Ce résultat implique en particulier que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p_c(\Omega)$ pour la norme de $L^p(\Omega)$. On observe alors que si $f \in L^p(\Omega)$, la suite $f\, 1_{B(0,n)}\, 1_{d(\cdot,\Omega^c)\geq 1/n}$ converge (par convergence dominée) vers f pour la norme de $L^p(\Omega)$. On en déduit que $L^p_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, et donc finalement que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ (pour la norme de $L^p(\Omega)$).

Supposons maintenant que $f \in L^\infty_c(\Omega)$. On sait alors que pour tout $p \in [1, \infty[$, on a $f \in L^p_c(\Omega)$. On en déduit que $\tilde{f} * \phi_n|_\Omega \mapsto_{n\to\infty} f$ pour la norme de $L^p(\Omega)$. De plus,

$$||\tilde{f} * \phi_n|_\Omega||_\infty \leq ||f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Considérons enfin le cas où $f \in L^\infty(\Omega)$. On pose pour $n \geq 1$ entier,

$$g_n = f\, 1_{B(0,n)}\, 1_{d(\cdot,\Omega^c)\geq 1/n}.$$

D'après le résultat lié à $L^\infty_c(\Omega)$, on sait qu'il existe $h_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, tel que

$$||h_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||g_n||_{L^\infty(\Omega)},$$

et
$$||h_n - g_n||_{L^1(\Omega)} \leq 1/n.$$

On en déduit que
$$||h_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||f||_{L^\infty(\Omega)},$$

et que, pour $K \subset \Omega$ compact et n assez grand (lorsque $d(K, \Omega^c) \geq 1/n$ et $K \subset B(0, 1/n)$),

$$||h_n - f||_{L^1(K)} \leq 1/n.$$

On en déduit que h_n converge vers f dans $L^1_{loc}(\Omega)$, et donc qu'il existe une suite extraite de h_n, notée f_n, qui converge p.p. vers f, et qui est telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} ||f_n||_{L^\infty(\Omega)} < +\infty.$$

Proposition: Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. On peut trouver une fonction χ de $\mathcal{D}(\Omega)$ positive (et même à valeurs dans $[0, 1]$) qui vérifie $\chi|_K = 1$.

Preuve: On considère $\delta = d(K, \Omega^c) > 0$. On pose $\chi = 1_{K+B(0,\delta/2)} * \phi_{E(3/\delta)+1}$.

Définition: On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions. Ce sont les formes linéaires T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui sont continues au sens suivant: pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $r_K \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tels que pour tout ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est inclus dans K,

$$| < T, \phi > | \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq r_K} ||\partial_\alpha \phi||_\infty.$$

Si l'on peut prendre $r_K \leq r \in \mathbb{N}$, on dit que T est d'ordre (au plus) r. Le plus petit des $r \in \mathbb{N}$ qui conviennent est appelé l'ordre de la distribution.

Proposition: Les *classes d'équivalence de fonctions* f de $L^1_{loc}(\Omega)$ (ensemble des fonctions qui sont dans $L^1(K)$ pour tous les compacts K inclus dans Ω) définissent une distribution (notée ici U_f) de la manière suivante:

$$< U_f, \phi >= \int_\Omega f(x)\, \phi(x)\, dx.$$

L'application $f \mapsto U_f$ est une injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui permet d'identifier les éléments de $L^1_{loc}(\Omega)$ avec des distributions. Attention: la notation U_f n'est pas universelle, le plus souvent on ne fait pas la distinction entre f et U_f.

Preuve: On voit immédiatement que (pour f dans $L^1_{loc}(\Omega)$), U_f est une distribution d'ordre 0. L'application $U : f \mapsto U_f$ est injective car si $U_f = 0$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega f\, \phi = 0$. On considère une suite ψ_n d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ tels que $\psi_n \to 1_{f\geq 0}1_K$ p.p, pour K compact donné inclus dans Ω, et tels que $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\psi_n||_\infty < +\infty$. On en déduit par convergence dominée que $\int_K |f| = 0$, et donc que $f = 0$ p.p.

Toutes les distributions ne sont pas de cette forme, en effet des mesures telles que la masse de Dirac $< \delta_0, \phi >= \phi(0)$ ou $< T, (x,y) \mapsto \phi(x,y) >= \int_{\mathbb{R}} \phi(0,y)\, dy$ ne le sont déjà pas. On peut s'en convaincre (pour la première de ces mesures) en approximant par convolution la fonction $1_{f\geq 0}\, 1_{\varepsilon \leq |x| \leq \varepsilon^{-1}}$, où $\varepsilon > 0$, où f serait un candidat dans $L^1(\mathbb{R})$ à l'identité $U_f = \delta_0$.

Il faut bien garder en tête le fait que les distributions généralisent les classes d'équivalences de fonctions définies à un ensemble de mesure nulle près et non les fonctions elles-mêmes. En particulier il n'est pas possible de parler de la valeur en un point d'une distribution (sauf lorsque celle-ci s'écrit sous la forme U_f avec f admettant un représentant continu [nécessairement unique]).

Par contre l'aspect "local" des distributions peut se voir à travers la définition suivante: pour T distribution sur un ouvert Ω, on peut définir $T|_{\Omega'}$, restriction de T à un ouvert Ω' inclus dans Ω, par la formule (valable pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega')$):

$$< T|_{\Omega'}, \phi >=< T, \tilde{\phi} >,$$

avec $\tilde{\phi}$ prolongement par 0 sur Ω de ϕ.

Par définition, pour montrer que deux distributions T_1 et T_2 (sur Ω) sont égales, il convient de montrer que $< T_1, \phi >=< T_2, \phi >$ pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$. On procède de même pour les inégalités:

Définition: Si T_1, T_2 sont deux distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on dira que $T_1 \geq T_2$ si $< T_1, \phi > \geq < T_2, \phi >$ pour toute fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ *positive*.

On vérifie aisément que si $f_1,\ f_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$, et $f_1 \leq f_2$ p.p.alors $U_{f_1} \leq U_{f_2}$. Réciproquement, si $U_{f_1} \leq U_{f_2}$, on voit en approximant par convolution $1_{f_1 - f_2 \geq 0}\, 1_K$, où K est un compact quelconque de Ω, que $f_1 \leq f_2$ p.p.

Proposition: Les distributions positives sont d'ordre 0.

Preuve: Soit K un compact de Ω. On observe que pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans K, et $\chi_K \in \mathcal{D}(\Omega)$ positive et valant 1 sur K, $||\phi||_\infty \chi_K - \phi \geq 0$. On en déduit que si T est positive,

$$< T, ||\phi||_\infty \chi_K - \phi > \geq 0,$$

si bien que
$$< T, \phi > \leq < T, \chi_K > \ ||\phi||_\infty.$$
En changeant ϕ en $-\phi$, on conclut.

Exemple: La forme linéaire $T : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\, dx$ est une distribution d'ordre ≤ 1 sur $\mathbb{R}$.

Définition: Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions, et T une distribution (sur Ω). On dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (ou bien "au sens des distributions") lorsque pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $< T_n, \phi > \to < T, \phi >$.

On verra l'analogie avec la convergence faible $*$ dans le dual d'un espace vectoriel normé dans la suite du cours. Il s'agit d'une notion très faible de convergence: par exemple $\sin(nx) \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, et même $n\, \sin(nx) \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En particulier cette convergence n'entraîne pas la convergence p.p. lorsque l'on a affaire à des fonctions (i.-e. lorsque la suite de distributions T_n est de la forme U_{f_n}, avec $f_n \in L^1_{loc}(\Omega)$), et elle ne se prête pas à la multiplication: $\sin^2(nx) \to 1/2$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Proposition: Une limite au sens des distributions est unique. L'application $f \mapsto U_f$ est continue de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ au sens suivant (continuité séquentielle): si $f_n \to f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$ (i.-e. $f_n \to f$ dans $L^1(K)$ pour tout K compact inclus dans Ω), alors $U_{f_n} \to U_f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition: Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit les dérivées (partielles) de T par la formule
$$< \partial_\alpha T, \phi > = (-1)^{|\alpha|} < T, \partial_\alpha \phi > .$$

Proposition: Si $f \in C^s(\Omega)$ (avec $s \in \mathbb{N}$), alors il y a coïncidence entre dérivée usuelle (jusqu'à l'ordre s) et dérivée au sens des distributions:
$$\partial_\alpha U_f = U_{\partial_\alpha f}.$$

On vérifie aisément que la dérivée s-ième d'une distribution d'ordre (au plus) r est une distribution d'ordre (au plus) $r + s$.

Proposition: Lorsque l'on a une fonction f de classe C^1 par morceaux sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ [i.-e. lorsqu'à chaque point de singularité de f, on a une limite à droite et à gauche de la fonction ET de la dérivée], avec

(x_i) la liste (éventuellement infinie, mais localement finie) de ses points de singularité, on peut écrire la formule suivante (dite “formule des sauts”):

$$(U_f)' = U_{f'} + \sum_i (\lim_{x \to x_i^+} f - \lim_{x \to x_i^-} f)\, \delta_{x_i},$$

dans laquelle f' désigne la fonction continue par morceaux constituée des morceaux de dérivée (régulière) de f.

Preuve: On traite le cas où f admet une unique discontinuité en 0. On a alors pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} < (U_f)', \phi > &= - < U_f, \phi' > = - \int_{\mathbb{R}} f\, \phi' \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(- \int_{\mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]} f\, \phi' \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]} f'\, \phi + f(\varepsilon)\, \phi(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\, \phi(-\varepsilon) \right) \\ &= < U_{f'}, \phi > + (f(0^+) - f(0^-))\, \phi(0). \end{aligned}$$

Une grande part de l'intérêt des distributions réside dans la continuité (séquentielle) de la dérivée:

Proposition: Pour toute suite de distributions $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur Ω et toute distribution T sur Ω, on a

$$T_n \to T \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\alpha T_n \to \partial_\alpha T.$$

Proposition: L'équation $T' = 0$ dans $\mathbb{R}$ se résout dans $\mathcal{D}'$ en $T = U_{x \mapsto Cte}$.

En effet les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui sont des dérivées de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont celles dont l'intégrale (sur $\mathbb{R}$) vaut 0.

Exercice: Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $x \in \mathbb{R}^N \mapsto |x|^r$ pour $r > -N + 1$, au sens des distributions (on pourra pour cela enlever à $\mathbb{R}^N$ une boule centrée en 0 de rayon $\varepsilon > 0$).

Vérifier que $-\Delta(x \mapsto |x|^{-1}) = 4\pi\, \delta_0$ dans $\mathbb{R}^3$: on dit que $x \mapsto |4\pi\, x|^{-1}$ est la solution fondamentale du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$.

Définition: Pour $\psi \in C^\infty(\Omega)$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose

$$< \psi\, T, \phi > = < T, \psi\, \phi > .$$

Proposition: Pour $\psi \in C^\infty(\Omega)$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a $\psi\, U_f = U_{\psi\, f}$, si bien que la multiplication par une fonction (régulière) d'une distribution prolonge la multiplication par une fonction (régulière) d'une fonction. De plus, pour $|\alpha| = 1$, on a $\partial_\alpha(\psi\, T) = \psi\,(\partial_\alpha T) + (\partial_\alpha \psi)\, T$. On peut également vérifier que la multiplication par une fonction régulière ne change pas l'ordre d'une distribution. Enfin si T_n converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors pour ϕ dans $C^\infty(\Omega)$, $\phi\, T_n$ converge vers $\phi\, T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition: Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{N}$, on note

$$W^{s,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \quad \forall |\alpha| \le s, \quad \partial_\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

Cet espace est dit “de Sobolev”.

Pour être plus précis, $f \in W^{s,p}(\Omega)$ lorsque $\forall |\alpha| \le s, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega), \partial_\alpha U_f = U_{g_\alpha}$. On définit la norme correspondante par (en simplifiant les notations)

$$||f||^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le s} ||\partial_\alpha f||^p_{L^p(\Omega)}.$$

L'espace des fonctions de L^1 (ou des mesures bornées) dont toutes les dérivées (au sens des distributions) d'ordre inférieur à s sont des mesures bornées (ou plus précisément des distributions d'ordre 0) est également intéressant. Pour $s = 1$, on le note $BV(\Omega)$ (fonctions à variation bornée).

On verra que l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est celui des fonctions Lispschitziennes.

Exemple: Vérifier que $x \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^N \mapsto |x|^r$ est dans $W^{s,p}(B(0,1))$ lorsque $r > -N/p + s$. Montrer que $x \mapsto sgn(x)$ est une fonction BV sur $]-1, 1[$.

On vérifie facilement qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $W^{s,p}(\Omega)$ converge vers un élément f du même espace si et seulement si $(\partial_\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial_\alpha f$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $|\alpha| \le s$ (ici $\partial_\alpha f_n$ est à comprendre au sens des distributions).

L'ensemble des (classes d'équivalence de) fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ (pour Ω ouvert borné) pour $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, complété par $M^1(\Omega)$, $BV(\Omega)$ et les espaces $C_b^s(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{N}$, forme un réseau d'espaces inclus les uns dans les autres avec injection continue.

A retenir absolument: La définition et les propriétés de la convolution par une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$; la définition et les propriétés des suites régularisantes; le théorème de densité des fonctions de $\mathcal{D}$ dans L^p, la définition de $\mathcal{D}'$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$; la définition de l'ordre d'une distribution (plus précisément d'une distribution d'ordre au plus $r \in \mathbb{N}$); la définition d'une distribution associée à une fonction localement intégrable; la définition de la convergence au sens des distributions; la définition de la dérivée au sens des distributions et son rapport avec la convergence; la formule des sauts; la caractérisation des distributions de dérivée nulle (en dimension 1); la définition de la multiplication d'une distribution par une fonction régulière et la formule de dérivée du produit; la définition des espaces de Sobolev et de leurs normes; la caractérisation de la convergence d'une suite dans ces espaces.

1.4 Espaces locaux, C^∞

Définition: On appelle semi-norme une application p de E (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les deux derniers axiomes des normes, ainsi que la propriété $p(0) = 0$. On dit d'un espace qu'il est semi-normé lorsqu'il est muni d'une famille $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ de semi-normes.

Remarque: Le plus souvent cette famille est filtrante, i.e. telle que pour toute sous-famille finie $A_1 \subset A$, il existe $\beta \in A$ tel que $\forall x \in E, \alpha \in A_1, \quad p_\alpha(x) \leq p_\beta(x)$. On pourra noter qu'on peut transformer une famille non filtrante en une famille filtrante en lui adjoignant les semi-normes $p_B(x) = \sup_{b \in B} p_b(x)$, pour toute famille finie B de A.

Définition: La topologie d'un espace semi-normé est définie comme la moins fine qui rende les $p_\alpha(\cdot - y)$ continues, pour tous les $\alpha \in A$, $y \in E$. Elle est donc constituée des unions quelconques d'intersections finies d'ensembles du type $p_\alpha(\cdot - y)^{-1}(U)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}_+$). Une base de voisinages de x_0 est donc formée par les intersections finies (contenant x_0) d'ensembles du type $p_\alpha(\cdot - y)^{-1}(]a, b[)$, avec $a < b$, $\alpha \in A$.

Proposition: Une autre base de voisinages de $x_0 \in E$, plus utilisable, est formée des intersections finies de semi-boules $B_\alpha(x_0, \varepsilon) = \{x \in E, \quad p_\alpha(x - x_0) < \varepsilon\}$ (on peut éliminer les intersections finies si les semi-normes sont filtrantes).

Preuve: En effet d'une part $x \in p_\alpha(\cdot - x_0)^{-1}(]-1,\varepsilon[)$ entraîne $x \in B_\alpha(x_0,\varepsilon)$. D'autre part considérons un élément de la base de voisinage originelle. On suppose donc que $x_0 \in p_\alpha(\cdot - y)^{-1}(]a,b[)$. Alors on a $\delta := \frac{b-a}{2} - |p_\alpha(x_0-y) - \frac{a+b}{2}| > 0$. Donc si $x \in B_\alpha(x_0,\delta)$, on a $p_\alpha(x-x_0) < \delta$, et

$$\begin{aligned} |p_\alpha(x-y) - \frac{a+b}{2}| &\leq p_\alpha(x-x_0) + |p_\alpha(x_0-y) - \frac{a+b}{2}| \\ &< \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Proposition: Cette topologie est séparée si et seulement si

$$\cap_{\alpha\in A;\varepsilon>0} B_\alpha(0,\varepsilon) = \{0\}.$$

Preuve: En effet si la topologie est séparée alors pour tout $x \neq 0$, on peut trouver une semi-boule $B_\alpha(0,\varepsilon)$ [avec $\alpha \in A$ et $\varepsilon > 0$] telle que $x \notin B_\alpha(0,\varepsilon)$. Donc $x \notin \cap_{\alpha\in A;\varepsilon>0} B_\alpha(0,\varepsilon)$.

Réciproquement si la condition $\cap_{\alpha\in A;\varepsilon>0} B_\alpha(0,\varepsilon) = \{0\}$ est vérifiée, on peut trouver lorsque $x, y \in E$, $x \neq y$, un $\alpha \in A$ et un $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $p_\alpha(x-y) > \varepsilon$. On a alors $B_\alpha(x,\varepsilon/2) \cap B_\alpha(y,\varepsilon/2) = \emptyset$, d'où la séparation de E.

Il faut retenir qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E semi-normé lorsque $(p_\alpha(x_n - x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour tout $\alpha \in A$. En effet $p_\alpha(\cdot - x)$ est continue d'une part, et si d'autre part $(p_\alpha(x_n - x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors pour tout élément $B_\alpha(x,\varepsilon)$ de la base de voisinage de x_0, on voit que x_n est dans cet élément dès que n est assez grand.

Exercice: Montrer qu'une application linéaire de $(E,(p_\alpha)_{\alpha\in A})$ semi-normé (avec des semi-normes filtrantes) dans $(F,(q_\beta)_{\beta\in B})$ semi-normé (avec des semi-normes filtrantes) est continue lorsque pour tout $\beta \in B$, il existe $\alpha \in A$ et $C > 0$ tels que $q_\beta(f(x)) \leq C\, p_\alpha(x)$.

Proposition: Lorsque l'on peut prendre A dénombrable ($A = \{\alpha_i, i \in \mathbb{N}\}$) et que la topologie est séparée, cette topologie est métrisable grâce à la distance $d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \inf(1, p_{\alpha_i}(x-y))$.

Preuve: On utilise la propriété de séparation pour montrer que $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Les autres propriétés s'obtiennent facilement.

On note B^d les boules associées à la distance. On vérifie que la topologie définie par les semi-normes et celle définie par la distance sont identiques.

En effet si $x \in \cap_{i\leq N} B_{\alpha_i}(x_0, \varepsilon/2)$, alors $d(x, x_0) < \varepsilon/2 + 2^{-N} < \varepsilon$, lorsque $2^{-N} \leq \varepsilon/2$.

Réciproquement, si $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ sont donnés, alors lorsque $x \in B^d(x_0, \varepsilon\, 2^{-N})$, on a pour $i = 1, .., N$, $p_{\alpha_i}(x - x_0) < \varepsilon$.

Exemple 1: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note $K_n = \{x \in \Omega, \quad d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B(0, n)$: il s'agit d'une suite exhaustive croissante de compacts de Ω. On définit la topologie de la convergence uniforme sur les compacts (convergence compacte) sur $C(\Omega)$ par les semi-normes (filtrantes) $p_n(f) = ||f||_{L^\infty(K_n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'une topologie métrisable. La séparation provient du caractère exhaustif des compacts K_n. On voit que $f_n \to f$ pour cette topologie si et seulement si $f_n \to f$ uniformément sur tous les compacts.

Exemple 2: Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit de même sur $C^s(\Omega)$ (avec $s \in \mathbb{N}$) la topologie (métrisable) définie par les semi-normes (filtrantes) $p_n(f) = ||f||_{C^s(K_n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de la convergence compacte de toutes les dérivées d'ordre inférieur à s.

Exercice: Montrer que lorsque $\phi \in C^s(\mathbb{R})$, l'application linéaire $L_\phi : f \mapsto \{x \mapsto \phi(x)\, f(x)\}$ est continue de $C^s(\mathbb{R})$ dans lui-même pour la topologie précédente.

Exemple 3: Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit (pour $p \in [1, +\infty]$) $L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f \in L^p(K_n)\}$. Sa topologie est définie par les semi-normes (filtrantes) $p_n(f) = ||f||_{L^p(K_n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Elle est métrisable.

De même, pour $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, on définit $W^{s,p}_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f \in W^{s,p}(K_n^\circ)\}$. Sa topologie (métrisable) est définie par les semi-normes (filtrantes) $p_n(f) = ||f||_{W^{s,p}(K_n^\circ)}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4: Pour Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on note $C^\infty(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions qui sont de classe C^∞ sur un ouvert U contenant $\overline{\Omega}$. On munit $C^\infty(\overline{\Omega})$ de la topologie (métrisable) définie par les semi-normes (filtrantes) $p_s(f) = ||f||_{C^s(\overline{\Omega})}$, pour $s \in \mathbb{N}$.

Exemple 5: De même, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty]$, on munit $W^{\infty,p}(\Omega)$, espace des fonctions dont les dérivées (au sens des distributions) de n'importe quel ordre sont dans $L^p(\Omega)$, de la topologie (métrisable) définie par les semi-normes (filtrantes) $p_s(f) = ||f||_{W^{s,p}(\Omega)}$, pour $s \in \mathbb{N}$.

Exemple 6: Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit la topologie de $C^\infty(\Omega)$ par les semi-normes (filtrantes) $p_{s,n}(f) = ||f||_{C^s(K_n)}$, pour $s, n \in \mathbb{N}$, et celle (pour $p \in [1, +\infty]$), de $W^{\infty,p}_{loc}(\Omega)$ par les semi-normes (filtrantes) $p_{s,n}(f) = ||f||_{W^{s,p}(K_n^o)}$, pour $s, n \in \mathbb{N}$.

Exercice: Montrer que dans $C^\infty(\mathbb{R})$, les applications L_ϕ (multiplication par ϕ, pour $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$) et $f \mapsto \partial_\alpha f$ (pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$) sont continues.

Remarque: On obtient (pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ pas nécessairement borné) un réseau d'espaces $W^{s,p}_{loc}(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $p \in [1, \infty]$, complété par les espaces $C^s(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition: On définit $S(\mathbb{R}^N)$, ensemble des fonctions à décroissance rapide, comme l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ dont toutes les dérivées décroîssent aussi vite que tout inverse de polynôme à l'infini. On a donc

$$S(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, p \in \mathbb{N}, ||f||_{p;\alpha} < +\infty\},$$

avec

$$||f||_{p;\alpha} := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^{p/2} |\partial_\alpha f(x)|.$$

Proposition: On peut définir une topologie (métrisable) sur $S(\mathbb{R}^N)$ en utilisant les semi-normes (filtrantes) $\sup_{|\alpha| \leq A} ||f||_{p;\alpha}, A, p \in \mathbb{N}$.

Définition: On définit $S'(\mathbb{R}^N)$ (ensemble des distributions tempérées) comme l'ensemble des formes linéaires sur $S(\mathbb{R}^N)$, continues pour la topologie définie par les semi-normes précédentes, i.-e. les formes linéaires pour lesquelles il existe $A, p \in \mathbb{N}$,

$$\forall \phi \in S(\mathbb{R}^N), \qquad | < T, \phi > | \leq Cte \sup_{|\alpha| \leq A} ||\phi||_{p;\alpha}.$$

Remarque: La topologie de la convergence simple sur l'ensemble des applications de X sous-ensemble (non dénombrable) de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'il s'agit de la topologie la moins fine rendant les continues les applications coordonnées) peut-être définie à partir des semi-normes (filtrantes) $p_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$, où A décrit l'ensemble (non dénombrable) des parties finies de X: il ne s'agit pas d'une topologie métrisable.

A retenir absolument: La caractérisation d'une suite convergente dans un espace muni d'une famille de semi-normes; la construction d'une distance (donnant la même topologie que la famille de semi-normes) lorsque l'on dispose d'une famille dénombrable de semi-normes; la caractérisation des espaces séparés (parmi ceux qui sont munis d'une famille de semi-normes); la caractérisation des suites convergentes dans C^s d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et dans L^p_{loc}; la définition de $S(\mathbb{R}^N)$ et des semi-normes qui lui sont associées; la définition de $S'(\mathbb{R}^N)$.

2 Complétude

2.1 Suites de Cauchy, espaces complets, exemples

Rappel: Dans un espace métrique (E,d), on dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, \forall p, q \geq N_0, \qquad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

On rappelle que toute suite convergente est de Cauchy, et que toute suite de Cauchy est bornée. Enfin toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérance converge vers cette valeur d'adhérance. En particulier, une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérance.

L'espace est dit complet lorsque toute suite de Cauchy converge. Une partie d'un espace complet est complète si et seulement si cette partie est fermée. Tout espace (métrique) compact est complet.

Attention: il est possible de définir la notion de complétude dans certains espaces non métrisables, mais cette définition n'est pas forcément équivalente au fait que toute suite de Cauchy [lorsque l'on peut les définir] converge.

Définition: Un espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach. Un espace vectoriel semi-normé séparé défini par un nombre dénombrable de semi-normes (et donc métrisable) complet est dit espace de Fréchet.

Exemple 1: Les espaces $L^p(\Omega)$, $W^{s,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{N}$.

On admet ce résultat dans le cas des espaces L^p (c'est en fait un résultat d'intégration). Pour $W^{s,p}$, on raisonne ainsi: Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $W^{s,p}(\Omega)$, alors pour tout $|\alpha| \leq s$, $(\partial_\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, si bien que par complétude de cet espace, il existe $g_\alpha \in L^p(\Omega)$, telle que $\partial_\alpha f_n \to g_\alpha$ dans $L^p(\Omega)$. Par continuité dans l'espace des distributions de la prise de dérivées partielles, on a aussi $\partial_\alpha f_n \to \partial_\alpha f$ au sens des distributions. Donc $\partial_\alpha f = g_\alpha$, et on en déduit la complétude de $W^{s,p}(\Omega)$.

Exemple 2: Les espaces $C_b(\Omega)$, $C_b^s(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $s \in \mathbb{N}$.

En effet on peut commencer par utiliser la complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour obtenir des suites qui convergent simplement, puis passer à la limite dans la propriété de Cauchy. L'égalité entre limite des dérivées partielles et dérivées partielles des limites se fait par utilisation d'un théorème d'intégration des limites uniformes.

Exemple 3: Les espaces "locaux" $L^p_{loc}(\Omega)$ et $W^{s,p}_{loc}(\Omega)$ sont des espaces de Fréchet pour $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{N}$, de même que les espaces $C(\Omega)$, $C^s(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{N}$.

Il suffit d'utiliser la complétude des espaces de fonctions restreints à K_n, pour $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts.

Attention: pour ce qui concerne ce cours, dans ces espaces, les suites de Cauchy sont définies à partir de la distance associée à ces espaces (celle qu'on construit à partir de la famille dénombrable de semi-normes). D'autres choix de définitions (équivalents) sont possibles.

Exercice: Montrer que $C^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet (pour Ω ouvert ou $\mathbb{R}^N$), ainsi que $C^\infty_K(\Omega)$, espace des fonctions C^∞ sur Ω dont le support est inclus dans un compact K donné, muni des semi-normes (filtrantes) $p_n(f) = \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\le n} |\partial_\alpha f(x)|$. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est complet.

Rappels: Pour E espace vectoriel normé, F espace de Banach, l'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications continues, muni de la norme triple, est un espace de Banach. En particulier, E' est complet.

On en déduit que $M^1(\Omega)$ (et $BV(\Omega)$) sont complets.

A retenir absolument: La définition des suites de Cauchy dans un espace métrique; la définition d'un espace métrique complet et d'un espace de Banach; la preuve du fait que $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach (en admettant que $L^p(\Omega)$ en est un); le fait que $\mathcal{L}_c(E, F)$ (et donc en particulier E') est un espace de Banach lorsque F l'est.

2.2 Théorèmes de l'analyse classique liés à la complétude; Applications en dimension infinie

Rappels: Dans un espace métrique complet (E, d) (non vide), on a le théorème du point fixe de Picard: Si T est une contraction sur E, alors il existe un unique point fixe de T dans E.

Si de plus E est un espace de Banach, on a le théorème de Cauchy-Lipschitz [linéaire avec second membre]: Soit $x_0 \in E$, $A \in C([0,T], \mathcal{L}_c(E))$, $B \in C([0,T], E)$. Alors il existe une unique fonction f de $C^1([0,T]; E)$ telle que

$$f'(t) = A(t)\, f(t) + B(t), \qquad f(0) = x_0.$$

Exemple d'utilisation: Ces exemples sont en dimension infinie!

Le théorème du point fixe permet de démontrer l'existence d'une solution (unique) f continue dans $C([0,1])$, à l'équation

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{k(x,y)\, f(y)}{1 + f(y)^2}\, dy + \phi(x),$$

lorsque k, (resp. ϕ) sont des fonctions continues sur $[0,1]$ (resp. sur $[0,1] \times [0,1]$) vérifiant $||k||_\infty < 1$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz (dans sa version linéaire avec second membre) permet de démontrer l'existence d'une (unique) solution f dans $C^1(\mathbb{R}_+; C([0,1]))$ de l'équation

$$\partial_t u(t,x) = \int_0^1 k(x,y)\, u(t,y)\, dy + \phi(x), \qquad u(0,x) = u_{in}(x),$$

avec k, (resp. ϕ, u_{in}) continues sur $[0,1]$ (resp. $[0,1] \times [0,1]$).

Rappels: Soit (E, δ) un espace métrique et (F, d) un espace métrique complet. On a le théorème de prolongement des applications uniformément continues: Si $X \subset E$ et $\bar{X} = E$, et si $f : X \to F$ est uniformément continue, alors il existe une unique fonction $\bar{f}$ continue qui prolonge f sur E (i.-e. telle que $\bar{f}|_X = f$). De plus, $\bar{f}$ est uniformément continue.

Si E est un espace vectoriel normé, F est un espace de Banach, X un sous-espace vectoriel dense dans E et f est une application linéaire continue, alors $\bar{f}$ est de plus une application linéaire continue.

Exemple: Le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur un sous-espace dense permet de prolonger la transformée de

Fourier à $L^2(\mathbb{R}^N)$ à partir de sa définition sur $L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-i\, x\cdot\xi}\, dx.$$

On obtient le Théorème de Plancherel.

Théorème: Pour f dans $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$, et de plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} f(x)^2\, dx.$$

Il existe donc un unique prolongement par continuité de la transformée de Fourier définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ en application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Preuve: On commence par observer que la transformée de Fourier de la Gaussienne s'écrit:

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{-\frac{|x|^2}{2}}](\xi) = (2\pi)^{N/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}\,.$$

Pour cela on peut vérifier que

$$\nabla_\xi \mathcal{F}[x \mapsto e^{-\frac{|x|^2}{2}}](\xi) = -\xi\, \mathcal{F}[x \mapsto e^{-\frac{|x|^2}{2}}](\xi),$$

et utiliser l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

On rappelle que cette dernière s'obtient par dédoublement des variables et passage en coordonnées polaires. On en déduit par changement de variable ($\xi \to \xi/\sqrt{\varepsilon}$) que

$$\mathcal{F}[x \mapsto e^{-\varepsilon\, \frac{|x|^2}{2}}](\xi) = (2\pi)^N \frac{e^{-\frac{|\xi|^2}{2\varepsilon}}}{(2\pi\, \varepsilon)^{N/2}}\,.$$

Ensuite on remarque que si g est continue à support compact sur $\mathbb{R}^N$,

$$|g(x) - (g * (2\pi\, \varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/2\varepsilon})(x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x) - g(x-y))\, \frac{e^{-\frac{|y|^2}{2\varepsilon}}}{(2\pi\, \varepsilon)^{N/2}}\, dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(x) - g(x - \sqrt{\varepsilon}\, z)|\, \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{(2\pi)^{N/2}}\, dz$$

$$\leq 2\, ||g||_\infty \int_{|z|\geq R} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2}}}{(2\pi)^{N/2}}\, dz + \sup_{x\in\mathbb{R}^N, |h|\leq\sqrt{\varepsilon}\, R} |g(x+h) - g(x)|.$$

On conclut donc par uniforme continuité de g que $g * (2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/(2\varepsilon)}$ converge uniformément vers g. De plus si $Supp(g) \subset B(0,R)$, alors

$$|(g*(2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/2\varepsilon})(x)|^2 \leq ||g||_\infty^2 \left(\int_{|z|\geq|x|/2} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{2\varepsilon}}}{(2\pi\,\varepsilon)^{N/2}}\, dz + 1_{|x|\leq R+|x|/2} \right)^2$$

$$\leq ||g||_\infty^2 \left(\int_{|w|\geq|x|/\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{|w|^2}{2}}\, dw + 1_{|x|\leq 2R} \right)^2$$

$$\leq ||g||_\infty^2 \left(\int_{|w|\geq|x|} e^{-\frac{|w|^2}{2}}\, dw + 1_{|x|\leq 2R} \right)^2$$

(pour $\varepsilon < 1$), donc $g * (2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/(2\varepsilon)}$ converge vers g dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ par convergence dominée.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\delta > 0$, on peut trouver g continue à support compact sur $\mathbb{R}^N$ telle que $||f-g||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$. On en déduit que $f*(2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/(2\varepsilon)}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

En utilisant le théorème de Fubini et la transformée de Fourier calculée précédemment, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2\, e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi = (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} f\, (f * (2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/(2\varepsilon)}).$$

On se rappelle ensuite que $f * (2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/(2\varepsilon)}$ converge dans L^2 vers f. On en déduit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, (f * (2\pi\,\varepsilon)^{-N/2}\, e^{-|\cdot|^2/(2\varepsilon)}) \to \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2.$$

Enfin on conclut avec le théorème de convergence monotone (ou le lemme de Fatou) pour le membre de gauche de l'égalité.

A retenir absolument: Les énoncés des théorèmes de point fixe et de prolongement; la définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et l'identité de Plancherel (avec sa démonstration).

2.3 Lemme de Baire et applications

Théorème (Baire): Soit X un espace métrique complet. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses de X est dense dans X (ou bien toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide de X est d'intérieur vide dans X).

Preuve: Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une telle suite d'ouverts denses, et ω un ouvert de X, on construit par récurrence une suite x_n de X et une suite r_n de $\mathbb{R}_+^*$ telles que $\overline{B(x_0,r_0)} \subset \omega$, $\overline{B(x_{n+1},r_{n+1})} \subset B(x_n,r_n)\cap O_{n+1}$, et $r_{n+1} < r_n/2$ (on notera qu'on peut considérer un tel x_{n+1} car $B(x_n,r_n)\cap O_{n+1}$ est un ouvert non vide, du fait de la densité de O_{n+1}). La suite x_n est alors de Cauchy, et converge vers un point de $\omega \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n)$.

Théorème (Banach-Steinhaus): Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si pour tout x de E, on a $\sup_{i\in I} ||T_i(x)||_F < +\infty$, alors $\sup_{i\in I} |||T_i||| < +\infty$.

Preuve: Si $X_n = \{x \in E, \forall i \in I, ||T_i(x)||_F \le n\}$, alors $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, et X_n est fermé. On a donc une union dénombrable de fermés qui n'est pas d'intérieur vide, si bien que X_{n_0} admet un point intérieur pour un certain n_0. On a donc $x \in E$ et $r > 0$ tel que $||T_i(y)||_F \le n_0$ pour $y \in B_E(x,r)$ et $i \in I$. Pour $z \in B_E(0,1)$, $||T_i(x + r\,z)||_F \le n_0$, donc $r\,||T_i(z)||_F = ||T_i(r\,z)||_F \le n_0 + ||T_i(x)||_F$.

Exemples d'utilisation: On considère $F = \mathbb{R}$. On voit que si $(\phi_i)_{i\in I}$ est une famille de E', telle que pour tout x de E, $\sup_{i\in I} | < \phi_i, x > | < +\infty$ [famille faiblement $*$ bornée], alors $\sup_{i\in I} ||\phi_i||_{E'} < +\infty$ [famille fortement bornée].

En particulier, si $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de E' telle que pour tout x de E, $< \phi_n, x > \to < \phi, x >$, alors $\phi \in E'$ [toute suite faiblement convergente est fortement bornée, et une limite faible de formes linéaires continues est continue].

Remarque 1: Le théorème de Banach-Steinhaus a une extension naturelle lorsque E est un espace de Fréchet (muni d'une famille dénombrable filtrante de semi-normes $(p_q)_{q\in\mathbb{N}}$). Dans ce cas la conclusion est qu'il existe une semi-norme p_q telle que

$$\forall x \in E, \qquad \sup_{i\in I} |T_i(x)| \le Cst\, p_q(x).$$

En effet un point intérieur contient une semi-boule ouverte.

On en déduit qu'une limite de distributions (c'est-à-dire une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui vérifie $< T, \phi >= \lim_{n\to\infty} < T_n, \phi >$, où les T_n sont des distributions) est une distribution. On en considère en effet les semi-normes $\sup_{|\alpha|\le s} ||\partial_\alpha f||_\infty$, avec $s \in \mathbb{N}$, qui sont définies sur $C_K^\infty(\Omega)$, où K est un compact donné de Ω.

Remarque 2: On peut également considérer une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E telle que pour tout élément ϕ de E', la famille $< \phi, x_i >$ est bornée (famille faiblement bornée). En considérant les opérateurs $T_i : \phi \in E' \mapsto < \phi, x_i > \in \mathbb{R}$, on voit qu'on a le résultat "dual": $\sup_{i\in I} \sup_{\phi\in B_{E'}(0,1)} | < \phi, x_i > | < +\infty$. On verra que le théorème de Hahn-Banach permet d'en conclure que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est bornée dans E (famille fortement bornée).

Corollaire: Il existe une fonction f continue et 2π périodique telle que sa série de Fourier en 0 (tronquée symétrique) $s_n(f) := \sum_{|k|\le n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$ ne converge pas vers $f(0)$.

Preuve: On remarque que $s_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{\sin((n+1/2)\,t)}{\sin(t/2)}\, \frac{dt}{2\pi}$. Or

$$\Lambda_n := \left|\left| t \mapsto \frac{\sin((n+1/2)\,t)}{\sin(t/2)} \right|\right|_{L^1([-\pi,\pi])} \ge 4 \int_0^\pi |\sin((n+1/2)\,t)| \,\frac{dt}{t}$$

$$\ge 4 \int_0^{(n+1/2)\,\pi} |\sin t|\, \frac{dt}{t} \ge Cte \sum_{k=1}^n 1/k \ge Cte\, \log n.$$

On considère f_j continue 2π-périodique et à valeurs dans $[-1,1]$ telle que $f_j \to [t \mapsto sgn(\frac{\sin((n+1/2)\,t)}{\sin(t/2)})]$ p.p. Pour cela on peut utiliser la convolution par une suite régularisante ϕ_δ (on obtient alors une fonction régulière et 2π périodique). On peut alors utiliser le résultat sur la convolution par des suites régularisantes des fonctions L^∞. On voit que $s_n(f_j) \to \Lambda_n$ par convergence dominée, donc $||s_n||_{C([-\pi,\pi])'} \to +\infty$. On en déduit en utilisant le théorème de Banach-Steinhauss (sur l'espace des fonctions continues et 2π périodiques muni de la norme uniforme sur $[-\pi,\pi]$) que $(s_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour une certaine fonction f continue 2π-périodique.

Théorème (Application ouverte): Soit T une application linéaire de E espace de Banach dans F espace de Banach, continue et surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$.

Preuve: On observe que $F = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{n\,\overline{T(B_E(0,1))}\}$. Appliquant le théorème de Baire à F, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n_0\,\overline{T(B_E(0,1))}$ admet un point intérieur, noté y. Il existe donc $r > 0$ tel que $B_F(y,r) \subset n_0\,\overline{T(B_E(0,1))}$. Comme on a aussi $-y \in n_0\,\overline{T(B_E(0,1))}$, on en déduit que $B_F(0,r/n_0) \subset \overline{T(B_E(0,1))} + \overline{T(B_E(0,1))}$ (on notera que dans un espace vectoriel normé, pour tout α scalaire et X sous-ensemble de l'espace, $\alpha\,\bar{X} = \overline{\alpha\,X}$; c'est d'ailleurs déjà vrai dans un espace vectoriel topologique, c'est à dire un espace vectoriel où l'addition des vecteurs et la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur sont continues; ce résultat peut se voir facilement en utilisant des suites). Comme $B_E(0,1)$ est convexe et que T est linéaire, on voit que $T(B_E(0,1))$ est également convexe, et donc que $\overline{T(B_E(0,1))}$ est convexe (dans un espace vectoriel normé, l'adhérance d'un ensemble convexe est convexe: c'est de nouveau déjà vrai dans un espace vectoriel topologique). Comme pour tout ensemble convexe X, on $X + X = 2X$, on en déduit que $B_F(0,r/(2n_0)) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$. On dispose donc de $c > 0$ tel que $B_F(0,2c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$.

On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_F(0,2^{-n}\,c) \subset \overline{T(B_E(0,2^{-n-1}))}, \tag{1}$$

si bien que pour tout $\varepsilon > 0$, $Y \in B_F(0,2^{-n}\,c)$,

$$B_F(Y,\varepsilon) \cap T(B_E(0,2^{-n-1})) \neq \emptyset.$$

On se donne maintenant $y \in B_F(0,c)$. En prenant $n = 0$, $Y = y$, $\varepsilon = c/2$, on voit qu'il existe $z_1 \in B_E(0,1/2)$ tel que $||Tz_1 - y||_F < c/2$. En prenant maintenant $n = 1$, $Y = y - Tz_1$, $\varepsilon = c/4$, on voit qu'il existe $z_2 \in B_E(0,1/4)$ tel que $||Tz_2 + Tz_1 - y||_F < c/4$. On construit par récurrence $z_n \in B_E(0,1/2^n)$ tel que $||Tz_n + .. + Tz_2 + Tz_1 - y||_F < c/2^n$. On observe alors que la suite $x_n = z_1 + .. + z_n$ est de Cauchy dans E, et qu'elle converge donc dans E vers un point x. De plus, $||x||_E < 1$, et $y = Tx$. Donc $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$.

Remarque: Dans le théorème précédent, la complétude de E et F est décisive. Elle est utilisée de deux manières très différentes.

Corollaire: La réciproque d'une bijection linéaire continue entre espaces de Banach est également continue. Deux normes comparables qui font (toutes deux) d'un même espace vectoriel normé un espace de Banach sont équivalentes.

Corollaire (Théorème du graphe fermé): Soit T une application linéaire entre deux espaces de Banach E et F. Si le graphe de T est fermé dans $E \times F$ (muni de la norme $||(x,y)||_{E\times F} = ||x||_E + ||y||_F$), alors T est continue.

Preuve: Si le graphe de T est fermé, alors la norme $||x||_1 = ||x||_E + ||Tx||_F$ fait de E un espace de Banach: il suffit pour cela de considérer une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme $||\ ||_1$, et d'en déduire qu'elle est de Cauchy pour la norme $||\ ||_E$, ainsi que la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la norme $||\ ||_F$. On en déduit que $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$, avec $x \in E$ et $y \in F$. Comme le graphe de T est fermé dans $E \times F$, on a $Tx = y$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la norme $||\ ||_1$. On conclut en observant que $||x||_E \le ||x||_1$, si bien que les normes $||\ ||_1$ et $||\ ||_E$ sont comparables, et donc équivalentes.

Corollaire: Il existe une suite (indexée par $\mathbb{Z}$) tendant vers 0 qui n'est pas une suite de coefficients de Fourier de fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui sont 2π périodiques.

Preuve: L'opérateur $\Lambda : f \in L^1([-\pi,\pi]) \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est une injection continue d'un espace de Banach dans le sous espace fermé $c_0(\mathbb{Z})$ des suites tendant vers 0 à l'infini de l'espace de Banach $l^\infty(\mathbb{Z})$. Or la suite de fonctions $D_n : t \mapsto \frac{\sin((n+1/2)\,t)}{\sin(t/2)}$ vérifie $||D_n||_{L^1([-\pi,\pi])} \to_{n\to\infty} +\infty$, et $||\Lambda(D_n)||_{c_0(\mathbb{Z})} = 1$, ce qui empêche, du fait du théorème de l'application ouverte, la surjectivité de Λ.

A retenir absolument: L'énoncé et la démonstration du lemme de Baire et du théorème de Banach-Steinhauss; l'énoncé du théorème de l'application ouverte et du graphe fermé; L'enoncé et la preuve des corollaires qui donnent des contre-exemples relatifs aux séries de Fourier.

3 Compacité forte

Rappel: Dans un espace métrique, il y a équivalence pour une partie de l'espace entre

1. La propriété de Borel-Lebesgue,
2. La propriété de Bolzano-Weierstrass,
3. Le fait d'être précompact et complet.

On sait que dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, on a équivalence entre fermé borné et compact. Le théorème suivant montre qu'il n'en est rien en dimension infinie, et même que cette équivalence est spécifique de la dimension finie (Attention: on parle ici uniquement d'espaces vectoriels normés).

Théorème (Riesz): Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité fermée est compacte. Alors cet espace est de dimension finie.

C'est une conséquence du lemme suivant:

Lemme: Soit M un sous-espace vectoriel fermé de E espace vectoriel normé, tel que $M \neq E$. Alors il existe $u \in \overline{B(0,1)}$ tel que $d(u, M) \geq 1/2$.

Preuve du lemme: On prend $v \in E - M$, et on considère $m \in M$ tel que $0 < d(v, M) \leq ||v - m|| \leq 2\, d(v, M)$, il suffit de prendre $u = \frac{v-m}{||v-m||}$.

Preuve du théorème: Elle consiste à construire une suite de sous-espaces vectoriels de dimension finie E_n strictement croissante pour l'inclusion, et une suite $u_n \in \overline{B(0,1)} \cap E_n$ telle que $d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$.

On remarque pour cela que tout sous-espace vectoriel de dimension finie F d'un espace vectoriel normé est fermé, car complet. En effet si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F est de Cauchy, la suite de l'une quelconque de ses coordonnées $(x_k)^{(j)}$ dans une base $(e_j)_{j=1..d}$ est également de Cauchy (par équivalence des normes sur F), et converge donc vers vers une limite $x^{(j)}$, si bien que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = \sum_{j=1}^{d} x^{(j)}\, e_j$, et $x \in F$.

Ce résultat a des applications importantes dans l'étude des opérateurs (applications linéaires) en dimension infinie. On commence par la définition suivante:

Définition: Soit E, F des espaces de Banach, et $T \in L_c(E, F)$. On dit que T est compact si $\overline{T(B_E(0,1))}$ est compact dans F.

Le théorème de Riesz implique en particulier que $Dim(Ker(Id - T)) < +\infty$, lorsque T est un opérateur compact. On voit ainsi que les sous-espaces propres d'un opérateur compact (sauf pour la valeur propre 0) sont de dimension finie. On voit également que l'identité n'est jamais un opérateur compact sur un espace vectoriel normé de dimension infinie.

Théorème (Fredholm): Soit E un espace de Banach, et $T \in L_c(E, E)$ compact. Alors $Im(Id - T) = E$ si $Ker(Id - T) = \{0\}$.

Preuve: On suppose que $T \in L_c(E,E)$ est compact. On commence par montrer que $Im(Id-T)$ est fermée dans E. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de $Im(Id-T)$, alors on peut écrire $f_n = u_n - Tu_n \to f$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $||u_{\sigma(n)}|| \to +\infty$. On a alors $\frac{u_{\sigma(n)}}{||u_{\sigma(n)}||} - T\frac{u_{\sigma(n)}}{||u_{\sigma(n)}||} \to 0$. Quitte à extraire de nouveau, la compacité de T implique que $T\frac{u_{\sigma(\tau(n))}}{||u_{\sigma(\tau(n))}||} \to z$. On en déduit que $\frac{u_{\sigma(\tau(n))}}{||u_{\sigma(\tau(n))}||} \to z$ et $z - Tz = 0$, et donc par hypothèse $z = 0$. Mais $||z|| = 1$, ce qui est absurde, donc en fait $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit qu'on peut extraire une sous-suite convergente de $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si bien que $Im(Id-T)$ est fermé.

On voit par récurrence que $E_n := (Id-T)^n(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. De plus, en utilisant l'injectivité de $Id-T$, on voit également que si $Im(Id-T) \neq E$, la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante pour l'inclusion. En effet si $w \in E - Im(Id-T)$, alors $(Id-T)^n(w) \in (Id-T)^n(E) - (Id-T)^{n+1}(E)$.

On peut donc trouver $u_n \in E_n$ tel que $||u_n|| \leq 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Pour $n > m$, on a $Tu_n - Tu_m = q - u_m$, avec $q = -(Id-T)u_n + (Id-T)u_m + u_n \in E_{m+1}$. Donc $||Tu_n - Tu_m|| \geq 1/2$, ce qui incompatible avec le caractère compact de T.

Remarque: Dans le théorème précédent, la réciproque est vraie. On peut le voir facilement dans le cas particulier des opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert. Le cas général peut s'obtenir ainsi: en utilisant le fait que $Im(Id-T) = E$, on observe que si $Ker(Id-T) \neq \{0\}$, alors $Ker((Id-T)^n)$ est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels fermés de E. On construit alors une suite $u_n \in Ker((Id-T)^n)$ telle que $||u_n|| = 1$, et $d(u_n, Ker((Id-T)^{n-1})) > 1/2$. Pour $n > m$, on a $Tu_n - Tu_m = u_n - q$, avec $q = u_m + (Id-T)u_n - (Id-T)u_m \in Ker((Id-T)^{n-1})$. Donc de nouveau $||Tu_n - Tu_m|| \geq 1/2$, ce qui incompatible avec le caractère compact de T.

On donne maintenant des critères de compacité dans les espaces de fonctions les plus courants. On commence par le rappel suivant, relatif aux fonctions continues:

Théorème (Ascoli): Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions d'un espace métrique compact K dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) borné (pour la norme infinie). Si cet ensemble est uniformément équicontinu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \qquad d(x,y) \leq \eta \Rightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

alors il est relativement compact pour la norme uniforme sur K.

Corollaire: L'uniforme équicontinuité (et la bornitude) sur chaque compact d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ implique la compacité pour la topologie de la convergence compacte. L'uniforme équicontinuité (et la bornitude) de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $s \in \mathbb{N}$ sur chaque compact d'un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ entraîne la compacité dans l'espace $C^s(U)$, pour sa topologie naturelle.

Preuve: C'est une conséquence directe du principe d'extraction diagonale.

Le théorème d'Ascoli s'utilise souvent pour un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions bornés dans $C^1([a,b])$, avec $a < b$. Un tel ensemble est compact dans $C([a,b])$.

Théorème (Fréchet-Kolmogorov): Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions borné dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1,+\infty[$. On note $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Si pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega}$ est compact dans Ω, $\lim_{h\to 0} \sup_{f\in\mathcal{F}} ||\tau_h f - f||_{L^p(\omega)} = 0$ (notons que cette quantité est définie dès que $|h| < d(\overline{\omega}, \Omega^c)$) et si de plus pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un ouvert ω tel que $\overline{\omega}$ est compact dans Ω et $\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{L^p(\Omega-\omega)} \leq \varepsilon$, alors on a la relative compacité de $\mathcal{F}$ dans $L^p(\Omega)$.

Preuve: On le démontre dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses du théorème, et $\varepsilon > 0$. On prend $R > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{L^p([-R,R]^c)} < \varepsilon/3$, et $\delta > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f * \phi_\delta - f||_{L^p([-R,R])} < \varepsilon/3$ (avec ϕ_δ famille régularisante de fonctions).

Or $\mathcal{H}_\delta = \{f * \phi_\delta|_{[-R,R]}, f \in \mathcal{F}\}$ constitue un ensemble borné dans $C^1([-R,R])$. Donc $\mathcal{H}_\delta$ est compact dans $C([-R,R])$, et donc dans $L^p([-R,R])$. On en déduit que l'on peut trouver une famille finie $(f_i)_{i=1,..,P} \in \mathcal{F}|_{[-R,R]}$ telle que $\mathcal{H}_\delta \subset \cup_{i=1}^P B_{L^p([-R,R])}(f_i, \varepsilon/3)$. Donc $\mathcal{F}|_{[-R,R]} \subset \cup_{i=1}^P B_{L^p([-R,R])}(f_i, 2\varepsilon/3)$, et, en définissant $\tilde{f}_i$ comme la prolongée par 0 de f_i sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subset \cup_{i=1}^P B_{L^p(\mathbb{R})}(\tilde{f}_i, \varepsilon)$.

Le théorème de Fréchet-Kolmogorov donne un critère de compacité dans L^p. On peut en déduire un critère de compacité dans $W^{s,p}$ (pour $s \in \mathbb{N}$) en appliquant ce critère aux dérivées (au sens des distributions) d'ordre inférieur à s d'une famille de fonctions donnée.

Le théorème d'Ascoli permet de démontrer l'existence de solutions à certaines équations fonctionnelles, en particulier aux équations différentielles (ordinaires) à coefficients singuliers (continus mais pas forcément Lipschitziens).

Proposition (Cauchy-Arzela): Soit f une application uniformément continue et bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une fonction $t \in [0,T] \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que $x'(t) = f(x(t))$ et $x(0) = x_0$.

Preuve: Si on se donne une suite régularisante ϕ_n, on voit que $f * \phi_n$ converge uniformément vers f, et $f * \phi_n$ est de classe C^1 et bornée. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz (et le théorème des bouts), on observe que l'on peut trouver une fonction $t \in [0,T] \mapsto x_n(t) \in \mathbb{R}^N$ de classe C^1 telle que $x_n'(t) = (f * \phi_n)(x_n(t))$ et $x_n(0) = x_0$. Cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions est bornée dans C^1 et vérifie donc les hypothèses du théorème d'Ascoli, si bien que l'on obtient une sous-suite $x_{\sigma(n)}$ uniformément convergente sur $[0,T]$ vers une fonction continue $t \mapsto x(t)$. Il reste alors à passer à la limite dans la formulation intégrale de l'équation différentielle:

$$x_{\sigma(n)}(t) = x_{in} + \int_0^t (f * \phi_{\sigma(n)})(x_{\sigma(n)}(s))\, ds.$$

Cela est possible car les convergences de $f * \phi_n$ et de x_n sont uniformes.

Exemples d'opérateurs compacts: Soit I, J des intervalles compacts. Lorsque K est continue sur $I \times J$, l'application de $C(J)$ dans $C(I)$ $f \mapsto \{x \in I \mapsto \int_J K(x,y)\, f(y)\, dy\}$ est compacte (pour la norme uniforme sur I).

En effet, elle est continue et de plus,

$$\left| \int_J K(x_1,y)\, f(y)\, dy - \int_J K(x_2,y)\, f(y)\, dy \right|$$
$$\leq |J|\, ||f||_\infty \sup_{y\in J} |K(x_1,y) - K(x_2,y)|.$$

On conclut en utilisant le théorème d'Ascoli et l'uniforme continuité de K sur $I \times J$.

De même, si $K \in L^2(I \times J)$, alors la même application, mais de $L^2(J)$ dans $L^2(I)$, est compacte.

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit qu'elle est continue. De plus,

$$\int_{d(x,\partial I)\leq\varepsilon} \left| \int_J K(x,y)\, f(y)\, dy \right|^2 dx \leq ||f||^2_{L^2(J)} \int\int_{d(x,\partial I)\leq\varepsilon, y\in J} |K(x,y)|^2\, dydx.$$

De plus,

$$\int_{d(x,\partial I)\geq\delta} \left| \int_J K(x+h,y)\, f(y)\, dy - \int_J K(x,y)\, f(y)\, dy \right|^2 dx$$
$$\leq ||f||^2_{L^2(J)} \int_{d(x,\partial I)\geq\delta} \int_J |K(x+h,y) - K(x,y)|^2\, dydx.$$

On conclut en utilisant le théorème de Fréchet-Kolmogorov.

Corollaire: Soit $K \in C([0,1]\times[0,1])$, positif, tel que $K(x,y) = K(y,x)$, et $g \in L^2([0,1])$. Alors on peut trouver $f \in L^2([0,1])$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \qquad \int_0^1 K(x,y)\,[f(y) - f(x)]\, dy - f(x) = g(x).$$

Preuve: L'opérateur qui à f associe $x \mapsto \frac{1}{\nu(x)+1}\int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy$, avec $\nu(x) = \int_0^1 K(x,y)\, dy$, est compact sur $L^2([0,1])$. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Fredholm à $g/(1+\nu)$, qui est encore dans $L^2([0,1])$. Il faut pour cela vérifier l'injectivité de l'opérateur qui à $f \in L^2([0,1])$ associe

$$x \mapsto \frac{1}{\nu(x)+1}\int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy - f(x).$$

Supposons donc que pour $x \in [0,1]$,

$$\frac{1}{\nu(x)+1}\int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy - f(x) = 0.$$

On a alors (pour $x \in [0,1]$)

$$\int_0^1 K(x,y)\,[f(y) - f(x)]\, dy = f(x).$$

On en déduit, en multipliant l'équation par $f(x)$ et en intégrant que

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 K(x,y)\,|f(x) - f(y)|^2\, dydx = \int_0^1 |f(x)|^2\, dx.$$

A retenir absolument: Les 3 définitions équivalentes des compacts d'un espace métrique; l'énoncé et la démonstration du théorème de Riesz; la définition des opérateurs compacts; l'énoncé du théorème de Fredholm; l'énoncé des théorèmes d'Ascoli et de Fréchet-Kolmogorov; le fait que les opérateurs intégraux à noyau continu (resp. L^2) sont compacts (dans l'espace qui leur correspond).

4 Dual de L^p, Théorème de Hahn-Banach, densité, topologies faibles

4.1 Le dual d'un espace de Hilbert, le dual de $L^p(\Omega)$

Rappel: Dans un espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$, l'application $x \in H \mapsto (x|\cdot)$ est une isométrie (bijection qui conserve la norme) de H sur H'.

Théorème: Soit Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$, et $p \in [1 + \infty[$. On note p' l'élément de $]1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On considère l'application Φ : $f \in L^{p'}(\Omega) \mapsto [g \in L^p(\Omega) : x \mapsto \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx]$. Alors Φ est une isométrie de $L^{p'}(\Omega)$ dans $(L^p)'(\Omega)$ (bijection qui conserve la norme: $||\Phi(f)||_{(L^p)'(\Omega)} = ||f||_{L^{p'}(\Omega)}$).

Preuve: On remarque que (pour $f \in L^{p'}(\Omega)$) l'application $\Phi(f)$ est dans $(L^p)'(\Omega)$ du fait de l'inégalité de Hölder, de plus on obtient l'inégalité $||\Phi(f)||_{(L^p)'(\Omega)} \leq ||f||_{L^{p'}(\Omega)}$. L'égalité des normes (et donc l'injectivité de Φ) s'obtient en appliquant la forme linéaire à $g = \frac{|f|^{\frac{1}{p-1}-1} f}{||f^{\frac{1}{p-1}}||_{L^p}}$, lorsque $p > 1$. Lorsque $p = 1$, on introduit $g_\varepsilon = |A_\varepsilon|^{-1}\, 1_{A_\varepsilon}\, sgn(f)$, où A_ε est un ensemble non négligeable tel que pour $x \in A_\varepsilon$, $|f(x)| \geq ||f||_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon$.

On démontre la surjectivité dans le cas de $l^p(\mathbb{N})$. Le cas général est traité par exemple dans Rudin, Real and Complex Analysis.

Soit Ψ une forme linéaire continue sur $l^p(\mathbb{R}^N)$, avec $p \in]1, +\infty[$. On note e^n la suite définie par $e^n_k = \delta_{kn}$, pour $k, n \in \mathbb{N}$. On pose $\gamma_n = \Psi(e^n)$. On observe que

$$\sum_{n \leq N} |\gamma_n|^{p'} = |\Psi((\gamma_n\, |\gamma_n|^{p'-2}\, 1_{n\leq N})_{n\in\mathbb{N}})|$$

$$\leq ||\Psi||_{(l^p)'(\mathbb{N})}\, ||(\gamma_n\, |\gamma_n|^{p'-2}\, 1_{n\leq N})_{n\in\mathbb{N}}||_{l^p(\mathbb{N})}$$

$$\leq ||\Psi||_{(l^p)'(\mathbb{N})} \left(\sum_{n\leq N} |\gamma_n|^{(p'-1)\, p} \right)^{1/p}$$

$$\leq ||\Psi||_{(l^p)'(\mathbb{N})} \left(\sum_{n\leq N} |\gamma_n|^{p'} \right)^{1/p}.$$

Donc

$$||(\gamma_n\, 1_{n\leq N})_{n\in\mathbb{N}}||_{l^{p'}(\mathbb{N})} \leq ||\Psi||_{(l^p)'(\mathbb{N})},$$

si bien que par passage à la limite lorsque $N \to \infty$, $||(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}||_{l^{p'}(\mathbb{N})} < \infty$. Lorsque $p = 1$, on voit directement que $||(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}||_{l^\infty(\mathbb{N})} < \infty$.

Pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à support fini, on sait que $\Psi((c_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\, c_n$. On conclut par densité des suites à support fini dans $l^p(\mathbb{N})$. On remarque que pour $p = \infty$, cette dernière propriété n'est pas valide.

Proposition: (pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert) les formes linéaires du type

$$\phi \in W^{s,p}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f\, \partial_\alpha \phi$$

avec $|\alpha| \le s$, et $f \in L^{p'}(\Omega)$, sont des éléments de $(W^{s,p}(\Omega))'$.

A retenir absolument: La caractérisation du dual d'un espace de Hilbert; la caractérisation du dual de L^p.

4.2 Les théorèmes de Hahn-Banach

Définition: On dit qu'une fonction d'un espace vectoriel E (sur $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ est sous-linéaire lorsqu'elle est positivement homogène et convexe, i.-e. vérifie

$$p(\lambda\, x) = \lambda\, p(x); \qquad p(x+y) \le p(x) + p(y),$$

pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On voit qu'une semi-norme est une fonction sous-linéaire à valeurs positives qui vérifie de plus $p(x) = p(-x)$ pour $x \in E$.

Définition: Pour C un ensemble convexe contenant 0 d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on définit la jauge de C par $p_C(x) = \inf_{\{\rho>0, x\in\rho\, C\}} \rho$, pour $x \in E$. La jauge prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$.

Proposition: La jauge d'un ensemble convexe C (d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, et contenant 0) vérifie les propriétés des fonctions sous-linéaires [c'est une fonction sous-linéaire lorsqu'elle est finie en tout point. Dans ce cas, on dit que C est un ensemble convexe absorbant]. De plus $p_C^{-1}([0,1[) \subset C \subset p_C^{-1}([0,1])$.

Lorsque E est un espace vectoriel normé ou semi-normé, et que C est ouvert, alors p_C est finie en tout point, et $C = p_C^{-1}([0,1[)$ (enfin, lorsque de plus $C = -C$, la jauge p_C est une semi-norme continue de E).

Preuve: On remarque que $x \in \rho C$ équivaut à $\lambda x \in \lambda \rho C$, lorsque $\lambda > 0$, $x \in E$, si bien que le premier axiome des fonctions sous-linéaires est vérifié.

On observe ensuite que le deuxième axiome des fonctions sous-linéaires est vérifié automatiquement si $p_C(x) = +\infty$ ou $p_C(y) = +\infty$. Si ce n'est pas le cas, il existe $\alpha, \beta > 0$, tels que $x \in \alpha C$, $y \in \beta C$. Alors $x+y \in \alpha C + \beta C \subset (\alpha+\beta) C$ car C est convexe, et l'on voit que $p_C(x+y) \le p_C(x) + p_C(y)$.

Les inclusions $p_C^{-1}([0,1[) \subset C \subset p_C^{-1}([0,1])$ s'obtiennent de manière immédiate.

Si C est ouvert, on a $B(0,\varepsilon) \subset C$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Pour $x \in E$ ($x \neq 0$), on a donc $\frac{\varepsilon}{||x||}\, x \in C$, et $p_C(x)$ est fini.

Toujours lorsque C est ouvert, si $x \in C$, il est clair que $x \in \delta C$ pour $\delta < 1$, donc $C = p_C^{-1}([0,1[)$.

Théorème de Hahn-Banach, forme analytique: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p une application sous-linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On considère une forme linéaire g sur un sous-espace vectoriel G de E, telle que pour $x \in G$, $g(x) \le p(x)$. Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que pour $x \in E$, $f(x) \le p(x)$.

Preuve: On considère l'ensemble $P = \{h : D_h \subset E \to \mathbb{R},$ avec D_h sev de E contenant G, et h linéaire prolongeant g et inférieure à $p\}$. Cet ensemble est naturellement muni d'une relation d'ordre:

$$h_1 \le h_2 \quad \text{lorsque} \quad D_{h_1} \subset D_{h_2}, \qquad h_2|_{D_{h_1}} = h_1.$$

Si l'on considère une partie totalement ordonnée de P, notée $(h_i)_{i\in I}$, alors en prenant $\cup_{i\in I} D_{h_i}$ et $h : x \mapsto h_i(x)$ pour $x \in D_{h_i}$ (ce qui est bien défini!), on obtient un majorant de $(h_i)_{i\in I}$.

On utilise alors le lemme de Zorn: tout ensemble ordonné inductif [i.-e. tel que tout partie totalement ordonnée admette un majorant] admet un élément maximal, [i.-e. tel qu'il est égal à tout élément plus grand que lui].

On considère $f : D_f \to \mathbb{R}$ cet élément maximal. Si $D_f \neq E$, alors on peut trouver $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin D_f$. On considère alors $D_h = D_f + \mathbb{R}\, x_0$, et $h(x + t\, x_0) = f(x) + t\, \alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ à fixer. On voit que D_h est un sev de E contenant G, que $D_f \subset D_h$, et que h est linéaire et prolonge g. On choisit alors $\alpha \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $h \le p$ sur D_h, i.-e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, x \in D_f, \qquad f(x) + t\, \alpha \le p(x + t\, x_0).$$

En utilisant l'homogénéité (positive) de f, p [et en prenant $t^{-1}\,x$ et non x], on voit qu'il suffit de vérifier [pour $x \in D_f$] que

$$f(x) + \alpha \leq p(x + x_0), \qquad f(x) - \alpha \leq p(x - x_0),$$

et donc que

$$\sup_{D_f}[f - p(\cdot - x_0)] \leq \alpha \leq \inf_{D_f}[p(\cdot + x_0) - f].$$

Choisir un tel α est possible car la sous-linéarité de p implique que

$$\forall x, y \in D_f, \qquad f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x).$$

On conclut alors que (sous l'hypothèse $D_f \neq E$) f n'est pas un élément maximal, ce qui est absurde. On a donc $D_f = E$ et l'on a construit l'élément annoncé par le théorème.

Remarque: Le plus souvent, ce théorème (sous la forme analytique écrite plus haut) est appliqué dans le cas où E est un espace normé. Le cas particulier où $G = \mathbb{R}\,x$, avec $x \in E$, et $f(t\,x) = t\,||x||_E$ permet de trouver $f \in E'$ telle que $||f||_{E'} = 1$ (et $< f, x >= ||x||_E$).

Cela montre que pour $x \in E$, on a $||x||_E = \max_{\{h \in E', ||h||_{E'} \leq 1\}} | < h, x > |$.

En particulier, comme on l'avait vu dans les applications du théorème de Banach-Steinhaus, on obtient que toute famille faiblement bornée de E (espace vectoriel normé) est fortement bornée (i.-e. bornée pour la norme).

On écrit maintenant le

Théorème de Hahn-Banach, forme géométrique: Soit E un espace vectoriel normé, et A, B deux convexes non vides disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe une forme linéaire continue sur E telle que $\sup_A f < \inf_B f$. On dit que l'hyperplan affine fermé d'équation $f(x) = \frac{1}{2}(\sup_A f + \inf_B f)$ sépare A et B au sens strict.

Preuve: On commence par le

Lemme: Soit E un espace vectoriel normé, et C un convexe ouvert contenant 0 et ne contenant pas $x_0 \in E$, alors il existe une forme linéaire f continue sur E vérifiant $f(x) < 1$ pour $x \in C$ et $f(x_0) = 1$. On dit que l'hyperplan affine fermé d'équation $f(x) = 1$ sépare (au sens large) x_0 et C.

Preuve du Lemme: La forme linéaire $g(t\,x_0) = t$ définie sur $\mathbb{R}\,x_0$ vérifie $g(x) \le p_C(x)$ (sur ce même espace), où p_C est la jauge de C. On en déduit que l'on peut prolonger g en une forme linéaire f continue (car C contient une boule et f est bornée sur C) sur E vérifiant les propriétés indiquées dans le lemme.

On démontre ensuite le

Lemme: Soit E un espace vectoriel normé, et deux convexes ouverts non vides A et B disjoints, alors il existe une forme linéaire f continue sur E vérifiant $\sup_A f \le \inf_B f$. On dit que l'hyperplan affine fermé d'équation $f(x) = \frac{1}{2}(\sup_A f + \inf_B f)$ sépare A et B au sens large.

Preuve du Lemme: On remarque que $C = A + (-B)$ est un convexe ouvert ($C = \cup_{y\in B}[A + (-y)]$), ne contenant pas 0, mais contenant un point $-x_0$ de E, si bien que $C + x_0$ contient 0 mais pas x_0. On dispose donc d'une forme linéaire f continue sur E vérifiant $f(x) < 1$ pour $x \in C + x_0$ et $f(x_0) = 1$. Donc si $a \in A$, $b \in B$, $f(a - b + x_0) < f(x_0)$, si bien que $f(a) < f(b)$, et finalement $\sup_A f \le \inf_B f$.

On termine alors la preuve du théorème de Hahn-Banach, forme géométrique: On remarque que $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$ sont des convexes ouverts non vides de E. De plus ils sont disjoints pour ε assez petit car la distance d'un compact à un fermé d'intersection vide dans un espace métrique est non nulle. On peut donc trouver un hyperplan fermé qui sépare au sens large A_ε et B_ε, et donc A et B au sens strict.

A retenir absolument: La définition et les propriétés de la jauge d'un ensemble convexe; l'énoncé du théorème de Hahn-Banach forme analytique et la remarque sur son utilisation; l'énoncé et la démonstration [a partir de la forme analytique] du théorème de Hahn-Banach forme géométrique.

4.3 Densité

On déduit du théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) un critère de densité:

Corollaire: Soit E un espace vectoriel normé, et A un sous-espace vectoriel de E. Alors A est dense dans E si et seulement si la seule forme linéaire continue qui s'annule sur A est 0.

Preuve: Si $\bar{A} \neq E$, alors pour $x_0 \in E - \bar{A}$, on dispose d'un convexe fermé ($\bar{A}$) et d'un convexe compact ($\{x_0\}$) disjoints et non vides. Soit $\phi \in E'$ telle que $\sup_{\bar{A}} \phi < \phi(x_0)$. En particulier $\phi(x_0) > 0$ et $\phi|_{\bar{A}} = 0$.

Exemple: L'ensemble $Vect\{x^k\, e^{-x^2}; k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Il suffit de vérifier que si $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$, et $\int_{\mathbb{R}} x^k\, \phi(x)\, e^{-x^2} dx = 0$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$) alors $\phi = 0$ p.p. C'est le cas car on peut approximer $e^{i\,x\,\xi}$ par la série entière que cette fonction définit en utilisant le théorème de convergence dominée, si bien que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, e^{i\,x\,\xi - x^2} dx = 0$. On conclut par injectivité de la transformée de Fourier.

A retenir absolument: L'énoncé et la démonstration [à partir du théorème de Hahn-Banach] du critère de densité.

4.4 Topologies faibles

Définition: Soit E un espace vectoriel normé. On définit la topologie faible de E comme la moins fine qui rende tous les éléments de E' continus (on en déduit qu'elle est plus faible que la topologie de la norme), ou bien (de manière équivalente), celle qui est définie par les semi-normes $| < \phi, \cdot > |$, pour $\phi \in E'$.

On dit donc qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E faiblement (et on note $x_n \rightharpoonup x$) lorsque pour tout $\phi \in E'$, $< \phi, x_n > \to_{n\in\mathbb{N}} < \phi, x >$.

Exemple: En utilisant la caractérisation du dual de L^p, on voit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f faiblement dans $L^p(\Omega)$ (pour $p \in [1, +\infty[$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable), lorsque pour tout $\phi \in L^{p'}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_n(x)\, \phi(x)\, dx \to_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f(x)\, \phi(x)\, dx.$$

En particulier, une limite faible dans L^p est unique. Ce résultat est en fait général:

Proposition: Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible qui lui est associée est séparée.

Preuve: C'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach: si $< \phi, x_0 >= 0$ pour tout $\phi \in E'$, alors $x_0 = 0$ car on peut trouver $\phi \in E'$ telle que $< \phi, x_0 >= ||x_0||$.

Proposition: Soit E un espace de Banach. Toute suite fortement convergente y est faiblement convergente. De plus, toute suite faiblement convergente est bornée (pour la norme).

Preuve: La première partie de la proposition est évidente. On a déjà vu que la seconde partie est une conséquence des théorèmes de Hahn-Banach et de Banach-Steinhauss.

Exercice: Montrer que $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $L^p(]0,1[)$ pour $p \in [1,+\infty[$, mais pas fortement.

Exercice: Soit $p \in]1,+\infty[$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite fortement convergente vers f dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite faiblement convergente vers g dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, alors $(f_n\, g_n)$ converge faiblement vers $f\,g$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposition: Dans E espace vectoriel normé, les convexes fermés faibles et les convexes fermés forts sont identiques.

Preuve: On remarque déjà que l'aspect convexe ou pas des sous-ensembles de E est indépendant de la topologie. On sait par ailleurs que tous les fermés faibles (convexes ou pas) sont des fermés forts. On considère maintenant un convexe fermé fort C. Soit $x_0 \notin C$, et f une forme linéaire continue sur E telle que $< f, x_0 >< \inf_{y\in C} < f, y >$, obtenue grâce au théorème de Hahn-Banach dans sa forme géométrique. On considère alors $V = \{x \in E, < f, x >< \frac{1}{2}(< f, x_0 > + \inf_{y\in C} < f, y >)\}$. C'est un voisinage de x_0 faible inclus dans C^c. On en déduit que C^c est un ouvert faible, et donc C un fermé faible.

Corollaire: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite faiblement convergente vers f dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1,+\infty[$ et Ω sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$.
- Si l'on sait que $f_n \geq 0$ (p.p.), alors $f \geq 0$ (p.p.).
- Si l'on sait que $||f_n||_{L^p(\Omega)} \leq 1$, alors $||f||_{L^p(\Omega)} \leq 1$.

Preuve: Les ensembles $\{f \in L^p(\Omega), \quad f \geq 0\}$ et $\{f \in L^p(\Omega), \quad ||f||_{L^p(\Omega)} \leq 1\}$ sont des convexes fermés forts, et donc faibles.

Remarque: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergentes dans $W^{s,p}(\Omega)$ vers f (pour $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1,+\infty[$), convergent faiblement dans $L^p(\Omega)$, ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur à s, c'est-à-dire qu'elles vérifient pour tout $\phi \in L^{p'}(\Omega)$,

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq s, \qquad \int_\Omega \partial_\alpha f_n(x)\, \phi(x)\, dx \to \int_\Omega \partial_\alpha f(x)\, \phi(x)\, dx.$$

A retenir absolument: La définition des suites faiblement convergentes dans un espace de Banach, la preuve de l'unicité de leur limite; le fait que convergence forte entraîne convergence faible; la caractérisation des suites faiblement convergentes de L^p; l'énoncé et la preuve du théorème d'équivalence entre convexes fermés forts et faibles; les propriétés des suites faiblement convergentes de $W^{s,p}$.

5 Topologie faible *, espaces réflexifs, compacité faible

Définition: Soit E un espace vectoriel normé. On définit la topologie faible $*$ (dite aussi très faible) sur E' comme la moins fine qui rende les applications $< \cdot, x_0 >$ (pour $x_0 \in E$) continues. C'est également la topologie définie par les semi-normes $| < \cdot, x_0 > |$, pour $x_0 \in E$.

Une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E' converge vers $\phi \in E'$ lorsque pour tout $x \in E$, on a $< \phi_n, x > \to_{n \to \infty} < \phi, x >$.

Proposition: Soit E un espace de Banach. La topologie très faible sur E' est séparée, et plus faible que la topologie faible sur E'. Toute suite fortement convergente de E' (i.-e. pour la norme de E'), est faiblement convergente et toute suite faiblement convergente de E' est très faiblement convergente. Toute suite faiblement $*$ convergente est bornée, et une forme linéaire limite faible $*$ est automatiquement un élément de E' (i.-e. continue).

Preuve: La séparation est évidente. Le fait que la topologie très faible est plus faible que la topologie faible est une conséquence du fait que le pour tout x dans E, l'application $C(x) : \phi \in E' \mapsto < \phi, x >$ est une forme linéaire continue (pour la topologie forte) sur E' (i.-e. un élément de E''). L'application C, dite opérateur d'évaluation, est une injection isométrique de E dans E''.

La dernière partie de la proposition a déjà été vue comme corollaire du théorème de Banach-Steinhauss.

Exemple: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable. Il est clair que les topologies faibles et faibles $*$ sont identiques pour $L^p(\Omega)$ (quand on identifie $(L^p)'(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$), lorsque $p \in]1, +\infty[$. Il n'y a pas lieu de définir de topologie faible $*$ sur $L^1(\Omega)$ (ce n'est pas a priori un dual). Enfin, la topologie faible $*$ est largement utilisée pour $L^\infty(\Omega)$. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^\infty(\Omega)$ faible $*$ vers f lorsque pour tout $\phi \in L^1(\Omega)$, on a

$$\int f_n(x)\,\phi(x)\,dx \to_{n\to\infty} \int f(x)\,\phi(x)\,dx.$$

Définition: Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est réflexif lorsque l'opérateur d'évaluation $C : E \to E''$ définie par $x \mapsto [\phi \in E' \mapsto <\phi, x>]$ est une bijection isométrique (qui conserve la norme).

Remarque: L'application C (opérateur d'évaluation) est toujours une injection isométrique, d'après le théorème de Hahn-Banach, forme analytique (qui fournit une forme linéaire continue f telle que $||f||_{E'} = ||x||_E$ et $< f, x >= ||x||_E^2$. L'espace est dit réflexif lorsque c'est également une surjection.

On voit que si E est un espace réflexif, il y a identité entre la topologie faible et faible $*$ dans E'.

Les espaces de Hilbert sont réflexifs du fait du théorème d'identification avec leur dual. C'est également le cas des espaces $L^p(\Omega)$, pour $p \in]1, +\infty[$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable.

Proposition: (Alaoglu) Soit E un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée de E' (pour la topologie forte, c'est-à-dire l'ensemble des $f \in E'$ tels que $||f||_{E'} \le 1$) est compacte pour la topologie faible $*$.

Preuve: On la fait dans le cas (qui est le seul vraiment utile) où cette même boule est métrisable pour la topologie faible $*$ (cf. proposition suivante). On commence par observer en considérant les semi-normes qui la définissent que la topologie faible $*$ sur E' n'est autre que la restriction à E' de la topologie de la convergence simple pour les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la topologie "produit infini" de $\mathbb{R}^E$.

La restriction de cette topologie à la boule unité fermée de E' (pour la topologie forte de E') n'est autre que la restriction à l'ensemble des fonctions linéaires de norme ≤ 1 du compact (comme produit quelconque de compacts) $\prod_{x\in E}[-||x||_E, ||x||_E]$.

Pour conclure, il suffit de vérifier que cet ensemble est fermé pour la topologie faible $*$ de E', en effet un sous-ensemble d'un compact est compact lorsqu'il est fermé. Comme on s'est restreint au cas où la boule unité fermée (pour la topologie forte de E') est métrisable, il suffit d'observer que si une suite de fonctions linéaires f_n de E dans $\mathbb{R}$ converge simplement vers une fonction f, cette dernière est linéaire; et que si ces mêmes fonctions vérifient pour chaque $x \in E$: $|f_n(x)| \leq ||x||_E$, alors on a également $|f(x)| \leq ||x||_E$.

Proposition: Si E est un espace vectoriel normé séparable, alors la boule unité fermée (pour la topologie forte) de E' est métrisable pour la topologie faible $*$.

Preuve: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense de $\overline{B_E(0,1)}$. On pose pour $f, g \in \overline{B_{E'}(0,1)}$: $d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{-n} \, | < f-g, x_n > |$. C'est clairement une distance. On montre qu'elle définit la même topologie que la topologie faible $*$.

Soit V un voisinage de $f_0 \in \overline{B_{E'}(0,1)}$ pour la topologie faible $*$. Il contient un ensemble de la forme $\cap_{i=1}^k \{| < \cdot - f_0, y_i > | < \varepsilon\} \cap \overline{B_{E'}(0,1)}$ avec $y_1, .., y_k \in E$ (ou, sans restreindre la généralité, $y_1, .., y_k \in \overline{B_E(0,1)}$). Soit (pour $i = 1..k$) $n_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $||y_i - x_{n_i}|| < \varepsilon/4$, et $r > 0$ tel que $2^{n_i}\, r < \varepsilon/2$. Si $d(f, f_0) < r$, on a $| < f - f_0, x_{n_i} > | < 2^{n_i}\, r$, donc $| < f - f_0, y_i > | < ||f - f_0||_{E'} \, \varepsilon/4 + \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Soit réciproquement $r > 0$ et $f_0 \in \overline{B_{E'}(0,1)}$. On choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k+1} < r/2$. Supposons que $| < f - f_0, x_i > | < r/2$ pour $i = 1, .., k$ et $f \in \overline{B_{E'}(0,1)}$. Alors $d(f, f_0) < r/2 + 2^{-k+1} < r$ pour ε assez petit et k assez grand.

On en déduit immédiatement le corollaire essentiel suivant:

Corollaire: De toute suite bornée dans le dual E' d'un espace vectoriel normé E séparable (i.-e. dont les normes dans E' sont bornées dans $\mathbb{R}$), on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement $*$ (vers un élément de E').

Proposition: Pour $p \in [1, +\infty[$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

Preuve: On fait la preuve pour $\Omega = [0,1]$. La famille des $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \, 1_{[i/k,(i+1)/k[}$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables (équipotents à $\mathbb{Q}^k$). Elle approxime les fonctions de $C^1([0,1])$

pour la norme $L^\infty([0,1])$: c'est clair en utilisant le théorème des accroissements finis et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On conclut en utilisant la densité des fonctions de $C^1([0,1])$ dans $L^p([0,1])$ (pour la norme de $L^p([0,1])$).

Cette proposition et le corollaire précédent montrent que

Théorème: Soit $p \in]1,+\infty[$, et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable. De toute suite bornée dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $L^p(\Omega)$ (vers un élément de $L^p(\Omega)$). De toute suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement $*$ dans $L^\infty(\Omega)$ (vers un élément de $L^\infty(\Omega)$).

On déduit de cette proposition le résultat suivant pour les suites bornées dans un espace de Sobolev:

Proposition: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in]1,+\infty[$ et $s \in \mathbb{N}$. De toute suite f_n bornée dans $W^{s,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers un élément $f \in W^{s,p}(\Omega)$, dont toutes les dérivées $\partial_\alpha f_n$ d'ordre inférieur à s convergent dans $L^p(\Omega)$ faible vers $\partial_\alpha f$.

De toute suite f_n bornée dans $W^{s,\infty}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement $*$ dans $L^\infty(\Omega)$ vers un élément $f \in W^{s,\infty}(\Omega)$, dont toutes les dérivées $\partial_\alpha f_n$ d'ordre inférieur à s convergent dans $L^\infty(\Omega)$ faible $*$ vers $\partial_\alpha f$.

La compacité faible dans les espaces de Sobolev permet de résoudre de nombreux problèmes d'existence de solutions pour des équations aux dérivées partielles (EDP), ainsi:

Théorème: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe $u \in H^1(\Omega)$, tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + u\, v - f\, v \Big) = 0.$$

[C'est à dire, lorsque Ω est régulier (Cf. chapitre suivant), une solution faible au problème de Neumann

$$-\Delta u + u = f,$$

$$\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0,$$

où n est la normale extérieure à Ω.]

Preuve: On considère $J_* := \inf_{u\in H^1(\Omega)} J(u)$, où

$$J(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\,u^2 - f\,u\right).$$

On observe que $J(u) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega f^2$, si bien que $J_* > -\infty$.

On considère alors une suite minimisante $u_n \in H^1(\Omega)$, vérifiant $J_* \leq J(u_n) \leq J_* + 1$, et $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = J_*$. Cette suite est bornée dans $H^1(\Omega)$, car $J(u_n) \geq \frac{1}{4}\,||u_n||^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega f^2$. Elle admet donc une sous-suite $u_{\sigma(n)}$ convergeant dans $L^2(\Omega)$ faible vers un élément $u \in H^1(\Omega)$, et dont le gradient converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers ∇u. Cette limite u réalise l'inf (i.-e. $J(u) = J_*$) car

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\,u_{\sigma(n)} = \int_\Omega f\,u,$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_{\sigma(n)}|^2 \geq \int_\Omega |\nabla u|^2$$

d'une part

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_{\sigma(n)}|^2 \geq \int_\Omega |u|^2$$

d'autre part.

On observe alors que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*$ et $v \in H^1(\Omega)$,

$$J(u + \varepsilon\, v) \geq J(u),$$

et on obtient le résultat demandé en faisant tendre ε vers 0, par valeurs positives d'abord, puis par valeurs négatives.

A retenir absolument: La définition des suites $*$ faiblement convergentes; l'énoncé du théorème d'Alaoglu et de métrisabilité des boules unités faibles $*$; l'utilisation de ce théorème pour les suites bornées dans L^p et $W^{s,p}$ $(p > 1)$.

6 Injections de Sobolev

6.1 Densité dans les espaces de Sobolev

On commence par définir la convolution d'une distribution et d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Définition-Proposition: Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, et $x \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$(T * \phi)(x) =< T, \phi(x - \cdot) > .$$

On dit qu'il s'agit de la convolée de T et ϕ, et c'est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on a

$$\partial_\alpha (T * \phi) = (\partial_\alpha T) * \phi = T * (\partial_\alpha \phi).$$

Enfin, cette définition prolonge celle de la convolution des fonctions. En effet si $T = U_g$ avec $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $U_g * \phi = g * \phi$.

Preuve: On se contente de vérifier que $T * \phi$ est de classe C^1 et que sa dérivée est $T * \phi'$, en dimension 1.

En effet, pour $|h| \le 1$,

$$|(T * \phi)(x + h) - (T * \phi)(x) - h\,(T * \phi')(x)|$$

$$= | < T, \phi(x + h - \cdot) - \phi(x - \cdot) - h\,\phi'(x - \cdot) > |$$

$$\le C_{Supp\phi(x-\cdot)+B(0,1)}\,||\phi(x + h - \cdot) - \phi(x - \cdot) - h\,\phi'(x - \cdot)||_{C^k}$$

$$\le C_{Supp\phi(x-\cdot)+B(0,1)}\,|h|^2\,||\int_0^1 \phi''(x - \cdot + \theta\,h)\,(1 - \theta)\,d\theta||_{C^k}$$

$$\le C_{Supp\phi(x-\cdot)+B(0,1)}\,|h|^2\,||\phi||_{C^{k+2}}.$$

On observe également que

$$[(\partial_\alpha T) * \phi](x) =< \partial_\alpha T, \phi(x - \cdot) >$$

$$= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial_\alpha[\phi(x - \cdot)] >$$

$$=< T, [\partial_\alpha \phi](x - \cdot) >$$

$$= (T * \partial_\alpha \phi)(x).$$

Enfin pour $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$,

$$(U_g * \phi)(x) =< U_g, \phi(x - \cdot) >$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\,\phi(x - y)\,dy = (g * \phi)(x).$$

Corollaire: Pour $s \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty[$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ (pour la norme $||\ ||_{W^{s,p}}$).

Preuve: Si $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, on commence par observer que $u\,\chi_n \to u$ dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, avec $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, tels que $Supp(\chi_n) \subset B(0, n+1)$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^N, n\in\mathbb{N}} ||\nabla\chi_n|| < \infty$, $0 \leq \chi_n \leq 1$, et $\chi_n|_{B(0,n)} = 1$. Donc l'ensemble $W_c^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ à support compact est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $u \in W_c^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, on observe alors que $u * \phi_n \to u$ dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, lorsque ϕ_n est une suite régularisante. En effet, la proposition précédente montre que $\partial_\alpha(u * \phi_n) = (\partial_\alpha u) * \phi_n$.

Notons que si l'on admet que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ($p \in [1, \infty[$), on a $f * \phi_n \to f$, alors la première partie de la preuve (troncature) est superflue. Elle et par contre utile si l'on admet seulement que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $f * \phi_n \to f$ (ce que l'on a observé au paragraphe 1.3).

Remarque: Le corollaire précédent ne peut s'étendre en général au cas de $W^{s,p}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On peut s'en rendre compte en considérant $W^{1,1}(]0,1[)$ par exemple. En effet en écrivant que $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt$ pour toute fonction régulière (C^1) f, on voit que les limites dans $W^{1,1}(]0,1[)$ de fonctions régulières à support compact vérifient toutes $\int_0^1 f'(t)\,dt = 0$, et donc $f(1) = f(0) = 0$ si elles sont régulières. Le fonctions qui sont régulières (C^1) mais qui ne s'annulent pas en 0 et 1 ne sont donc pas dans l'adhérance de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans $W^{1,1}(]0,1[)$ (pour la norme de $W^{1,1}(]0,1[)$).

Néanmoins, il existe un résultat de densité dans des ouverts dont la frontière est suffisamment régulière, décrit ci-dessous.

Définition: On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est régulier (de classe C^∞) si en chaque point x de sa frontière, il existe un difféomorphisme de classe C^∞ qui transforme un voisinage V_1 de x dans $\mathbb{R}^N$ en un voisinage V_2 de 0 dans $\mathbb{R}^N$, l'intersection de la frontière de Ω avec V_1 en l'intersection de l'hyperplan $\{x_1 = 0\}$ avec V_2, et l'intersection de Ω avec V_1 en l'intersection du demi-espace $\{x_1 > 0\}$ avec V_2.

Le résultat de densité pour les espaces de Sobolev sur de tels ouverts s'écrit:

Proposition: Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, et $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$. On considère $f \in W^{s,p}(\Omega)$. Alors on peut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_n|_\Omega \to f$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.

C'est une conséquence du résultat suivant de prolongement (que l'on admettra):

Proposition: Soit $N \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, et $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$. Alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ et un opérateur linéaire $P : W^{s,p}(\Omega) \to W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant (pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$) $Pu|_\Omega = u$, et pour tout $s' \le s$,

$$||Pu||_{W^{s',p}(\mathbb{R}^N)} \le C(\Omega)\, ||u||_{W^{s',p}(\Omega)}.$$

A retenir absolument: La définition et les propriétés de la convolée d'une distribution et d'une fonction de $\mathcal{D}$.

6.2 Injections de Sobolev: cas sous-critique

Remarque: En observant la relation

$$u(x) = \int_0^1 u(y)\, dy - \int_0^1 \int_x^y u'(t)\, dt\, dy$$

(pour $x, y \in]0,1[$, et $u \in \mathcal{D}(]0,1[)$), on voit que

$$||u||_{L^\infty(]0,1[)} \le ||u||_{L^1(]0,1[)} + ||u'||_{L^1(]0,1[)}.$$

En d'autres termes, "quitte à perdre une dérivée", on peut passer de L^1 à L^∞. Les injections de Sobolev sont une famille d'inégalités qui généralise cette idée en dimension quelconque, et pour des espaces de type L^p quelconques. On commence par le cas dit sous-critique, et pour des espaces de Sobolev définis sur $\mathbb{R}^N$ tout entier:

Proposition: Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}$, et $p \in [1, +\infty[$. On définit $p^* \in \mathbb{R}$ par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{s}{N}$, et on suppose que $p^* > 0$ (i.-e. $p < N/s$, dit cas sous-critique).

Alors $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et il existe une constante $C(p, s, N) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C(p, s, N) \sum_{|\alpha|=s} ||\partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (2)$$

Remarque: On peut retrouver la formule définissant p^* en utilisant l'invariance par dilatation de la formule (2). Si on pose $v_\lambda(x) = u(\lambda\, x)$, pour $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on voit en effet que (lorsque $|\alpha| = s$)

$$||v_\lambda||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{-N/p^*}\, ||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}, \qquad ||\partial_\alpha v_\lambda||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{s-N/p}\, ||\partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

En faisant tendre λ vers 0 et ∞, on en déduit que la formule (2) ne peut être valide (pour tout $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$) que si $-N/p^* = s - N/p$.

Preuve: On fait la preuve lorsque $N \leq 2$. On voit que la condition de sous-criticité ne peut être alors vérifiée que si $N = 2$ et $s = 1$.

On commence par le cas où $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

On a

$$u(x,y)^2 = \int_{-\infty}^{x} \partial_1 u(t,y)\, dt \int_{-\infty}^{y} \partial_2 u(x,s)\, ds,$$

puis

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^2\, dxdy \leq \int\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(t,y)|\, dtdy \int\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x,s)|\, dxds,$$

si bien que

$$||u||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|=1} ||\partial_\alpha u||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Il s'agit de l'inégalité de Sobolev (2) pour $p = 1$, $s = 1$, $N = 2$. On observe que (puisque $p^* > 2$) l'on a $(x \mapsto |x|^{p^*/2-1}\, x)' = x \mapsto \frac{p^*}{2}\, |x|^{p^*/2-1}$. En appliquant l'inégalité de Sobolev pour $p = 1, s = 1, N = 2$ à $|u|^{p^*/2-1}\, u$, puis l'inégalité de Hölder, on obtient (on observera que dans le cas que l'on traite: $p'\,(p^*/2-1) = p^*$, et de manière générale $p^*/p' = -1 + p^*\,(1 - s/N)$)

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^2)}^{p^*/2} \leq \frac{p^*}{4} \sum_{|\alpha|=1} ||\,|u|^{p^*/2-1}\, \partial_\alpha u||_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq \frac{p^*}{4}\, ||\,|u|^{p^*/2-1}||_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \sum_{|\alpha|=1} ||\partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leq \frac{p^*}{4}\, ||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^2)}^{p^*/2-1} \sum_{|\alpha|=1} ||\partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

Finalement,

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{p^*}{4} \sum_{|\alpha|=1} ||\partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

On conclut par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, et en utilisant le lemme de Fatou (la suite approximante u_n admet une sous-suite qui converge presque partout, et donc telle que $|u_n|^{p^*}$ converge également presque partout) que cette inégalité est valable pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

Cette proposition prend la forme suivante, lorsque Ω est un ouvert régulier:

Proposition: Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$, et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. On définit $p^* \in \mathbb{R}$ par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{s}{N}$, et on suppose que $p^* > 0$ (i.-e. $p < N/s$, il s'agit encore du cas sous-critique).

Alors il existe une constante $C(p, s, \Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$,

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, s, \Omega) \, ||u||_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

On voit en particulier que pour $q \in [p, p^*]$,

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C(p, s, \Omega) \, ||u||_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Lorsque l'ouvert Ω est borné, on peut même prendre $q \in [1, p^*]$.

Preuve: C'est une conséquence du théorème de prolongement et de la proposition précédente. En effet

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq ||Pu||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq C(p, s, N) \, ||Pu||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C(p, s, \Omega) \, ||u||_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

La seconde inégalité s'obtient par exemple à partir de l'inégalité de Hölder.

Remarque: On voit que le cas critique $p = N/s$ amène a l'inégalité précédente, mais pour $q \in [p, \infty[$ (où $q \in [1, \infty[$ lorsque l'ouvert est borné).

A retenir absolument: L'énoncé du théorème d'injection de Sobolev dans le cas sous-critique pour $\mathbb{R}^N$ et pour un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$; la démonstration de ce théorème dans le cas de $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$.

6.3 Inégalités de Sobolev: cas surcritique

On commence par une proposition dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier:

Proposition: Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty[$. On suppose que $p > N$. Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset C_b(\mathbb{R}^N)$ [i.-e. il existe $\tilde{u}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p.] et il existe une constante $C(p, N) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(p, N) \, ||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

De plus, on a une estimation dans un espace dit de Hölder ($C^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)$):

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N, \qquad |\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0)| \leq C(p,N)\,||x_1 - x_0||^{1-N/p}\,||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve: On fait la preuve lorsque $N = 2$. On commence par prendre $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. On considère Q un carré d'arête de taille r contenant $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Comme

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_0^1 \Big\{ (x-x_0)\,\partial_1 u(x_0 + t\,(x-x_0), y_0 + t\,(y-y_0))$$

$$+(y-y_0)\,\partial_2 u(x_0 + t\,(x-x_0), y_0 + t\,(y-y_0)) \Big\}\,dt,$$

on a

$$\Big| \int\int_Q u(x,y)\,\frac{dx\,dy}{|Q|} - u(x_0,y_0) \Big|$$

$$\leq \int\int_Q \int_0^1 r\,|\sum_{|\alpha|=1} \partial_\alpha u(x_0 + t\,(x-x_0), y_0 + t\,(y-y_0))|\,dt\,\frac{dx\,dy}{r^2}$$

$$\leq \frac{1}{r}\int_0^1 \int\int_Q |\sum_{|\alpha|=1} \partial_\alpha u(x_0 + t\,(x-x_0), y_0 + t\,(y-y_0))|\,dxdy\ dt$$

$$\leq \frac{1}{r}\int_0^1 \int_{|a|\leq tr}\int_{|b|\leq tr} |\sum_{|\alpha|=1} \partial_\alpha u(x+a, y+b)|\,dxdy\,\frac{dt}{t^2}$$

$$\leq \frac{1}{r}\int_0^1 ||\sum_{|\alpha|=1} \partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}\,(2\,t\,r)^{2/p'}\,\frac{dt}{t^2}$$

$$\leq \frac{2^{2/p'}\,r^{1-2/p}}{1-2/p}\,||\sum_{|\alpha|=1} \partial_\alpha u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

Comme deux points quelconques (x_1,y_1) et (x_0,y_0) sont dans un même carré d'arête de taille $\sup(|x-x_0|, |y-y_0|)$, on obtient l'estimation annoncée:

$$|u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)| \leq C(p)\,\sup(|x_1-x_0|, |y_1-y_0|)^{1-2/p}\,||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

En considérant des carrés d'arête de taille 1, on voit que

$$|u(x_0,y_0)| \leq \int\int_{|x-x_0|\leq 1/2, |y-y_0|\leq 1/2} |u(x,y)|\,dxdy + C(p)\,||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

On en déduit que

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq ||u||_{L^p(\mathbb{R}^2)} + (1-2/p)^{-1}\,||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

On conclut par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ (pour la norme de $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$). Le représentant continu $\tilde{u}$ de u s'obtient par utilisation du théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Cette proposition s'étend au cas d'un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, grâce au théorème de prolongement:

Proposition: Soit $N \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ et $p \in]N + \infty[$ (cas surcritique). Alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C_b(\overline{\Omega})$ [i.-e. il existe $\tilde{u}$ continue bornée sur $\overline{\Omega}$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p.] et il existe une constante $C(p,\Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C(p,\Omega)\,||u||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

De plus, on a une estimation dans un espace dit de Hölder ($C^{0,1-N/p}(\overline{\Omega})$):

$$\forall x_0, x_1 \in \overline{\Omega}, \qquad |\tilde{u}(x_1) - \tilde{u}(x_0)| \leq C(p,\Omega)\,||x_1 - x_0||^{1-N/p}\,||u||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Remarque: Les injections de Sobolev permettent d'obtenir une famille d'inclusions “diagonales” dans le diagramme d'inclusions “rectangulaires” des espaces de Sobolev (pour des ouverts bornés réguliers).

A retenir absolument: L'énoncé du théorème d'injection de Sobolev dans le cas surcritique pour un ouvert régulier.

6.4 Injections compactes: théorème de Rellich

On commence par la

Proposition: Soit $N \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors il existe $C(\Omega, p) > 0$ tel que pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a lorsque ω est un ouvert vérifiant $\omega + B(0,|h|) \subset \Omega$, l'inégalité:

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^p\,dx \leq C(\Omega,p)\,|h|^p \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx.$$

Preuve: En effet, pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on écrit

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + t\,h)\,dt,$$

si bien que pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}^N$,

$$\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^p\,dx \le |h|^p \int_{\omega+B(0,|h|)} |\nabla u(x)|^p\,dx.$$

On conclut par prolongement/densité (on le fait avec le théorème de prolongement précédemment énoncé lorsque l'ouvert Ω est régulier; une autre méthode de densité, que l'on ne détaillera pas, permet de l'obtenir dans le cas général).

Théorème de Rellich: Soit $N \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert **borné régulier** de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1,+\infty[$. Alors la boule unité (fermée) de $W^{1,p}(\Omega)$ est compacte dans

1. $L^q(\Omega)$ fort pour $q \in [1, p^*(= \frac{pN}{N-p})[$ lorsque $p < N$ (cas sous-critique)
2. $L^q(\Omega)$ fort pour $q \in [1,\infty[$ lorsque $p = N$ (cas critique)
3. $C(\overline{\Omega})$ si $p > N$ (cas surcritique).

La cas surcritique s'obtient directement par le critère d'Ascoli grâce à l'estimation dans l'espace de Hölder (notons dans ce cas que les éléments de $C(\overline{\Omega})$ sont les représentants continus des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$, et non des éléments de cet espace).

Le cas sous-critique s'obtient en observant que l'on peut trouver $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*}$, si bien qu'en utilisant l'inégalité de Hölder avec $|\tau_h u - u|^q = |\tau_h u - u|^{\alpha\, q}\, |\tau_h u - u|^{(1-\alpha)\, q}$ (et en notant τ_h la translation de vecteur h), pour ω ouvert de Ω tel que $\bar{\omega}$ est compact et inclus dans Ω, et $|h| < d(\overline{\omega}, \Omega^c)$,

$$||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)} \le ||\tau_h u - u||_{L^1(\omega)}^{\alpha}\, ||\tau_h u - u||_{L^{p^*}(\omega)}^{1-\alpha}$$

$$\le |h|^\alpha\, ||\nabla u||_{L^1(\Omega)}^{\alpha}\, (2\, C(p,\Omega)\, ||u||_{W^{1,p}(\Omega)})^{1-\alpha}.$$

On vérifie donc le premier critère du théorème de Fréchet-Kolmogorov.

De plus, toujours par inégalité de Hölder (ou de Jensen),

$$||u||_{L^q(\Omega-\omega)} \le ||u||_{L^{p^*}(\Omega-\omega)}\, |\Omega-\omega|^{1-q/p^*}$$

$$\le C(p,\Omega)\, ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}\, |\Omega-\omega|^{1-q/p^*}.$$

On vérifie donc le second critère du théorème de Fréchet-Kolmogorov.

Le théorème de Rellich s'utilise le plus souvent sous la forme suivante:

Proposition: Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, avec $1 \le p < \infty$. Alors il existe $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et une sous-suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\partial_\alpha u_{\sigma(n)}$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers $\partial_\alpha u$ (pour $|\alpha| = 1$) et

$$\text{si} \quad p < N, \qquad u_{\sigma(n)} \to u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \quad \text{fort} \quad \text{pour} \qquad 1 \le q < p^*,$$

$$\text{si} \quad p = N, \qquad u_{\sigma(n)} \to u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \quad \text{fort} \quad \text{pour} \qquad 1 \le q < \infty,$$

$$\text{si} \quad \infty > p > N, \qquad u_{\sigma(n)} \to u \quad \text{uniformément.}$$

A retenir absolument: L'énoncé du théorème de Rellich et l'énoncé de la dernière proposition.

6.5 Exemple d'utilisation du théorème de Rellich dans un problème elliptique non-linéaire

Le théorème de Rellich permet de passer de la preuve d'existence de solutions pour les EDP linéaires (cette preuve utilisait les théorèmes de compacité faible) à la preuve d'existence de solutions pour les EDP non-linéaires (dont la non-linéarité a une croissance maîtrisée).

Théorème: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier, $F \in C^1_b(\mathbb{R})$ (i.-e. F est bornée ainsi que sa dérivée), et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + F'(u)\, v + u\, v - f\, v\right) = 0,$$

[c'est à dire une solution faible au problème de Neumann

$$-\Delta u + F'(u) + u = f,$$

$$\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0,$$

où n est la normale extérieure à Ω].

Preuve: On considère en effet $J^* := \inf_{u \in H^1(\Omega)} J(u)$ (dont on vérifie qu'il est fini, en utilisant l'inégalité élémentaire $\frac{1}{4}a^2 - a\, b = -b^2$) où

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\, |\nabla u|^2 + F(u) + \frac{1}{2}\, u^2 - f\, u\right),$$

et une suite minimisante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$, i.-e. telle que $J^* \le J(u_n) \le J^* + 1$ et $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = J_*$.

On vérifie que cette suite est bornée dans $H^1(\Omega)$, elle admet donc une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$, vers une limite u. On observe (quitte à extraire) que $\int_\Omega F(u_{\sigma(n)}(x))\,dx \to \int_\Omega F(u(x))\,dx$ par convergence dominée, si bien que $J(u) \le \lim_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = J^*$, et finalement $J(u) = J^*$.

On écrit alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ l'inégalité $J(u) \le J(u + \varepsilon\, v)$. Comme $\varepsilon^{-1} \int_\Omega [F(u+\varepsilon\, v) - F(u)] = \int_\Omega v \int_0^1 F'(u+\varepsilon\,\theta\, v)\,d\theta$, on voit par convergence dominée que $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_\Omega [F(u+\varepsilon\, v) - F(u)] = \int_\Omega v\, F'(u)$, si bien que (en utilisant $\varepsilon > 0$):

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + F'(u)\, v + u\, v - f\, v \Big) \ge 0,$$

puis (en utilisant $\varepsilon < 0$ ou $v \mapsto -v$):

$$\forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + F'(u)\, v + u\, v - f\, v \Big) = 0.$$

A retenir absolument: Le principe de la méthode d'obtention d'une solution d'une EDP par minimisation.

7 Transformée de Fourier des distributions tempérées

7.1 Transformée de Fourier des fonctions: rappel des définitions et propriétés principales

Définition: Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat f$ ou $\mathcal{F}f$ la fonction définie (pour $\xi \in \mathbb{R}^N$) par

$$\hat f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,x\cdot\xi}\, f(x)\,dx.$$

Remarque: Cette définition admet de nombreuses variantes, qui conduisent à des formules où les constantes sont parfois différentes de celles présentées dans ce polycopié.

Proposition: Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier $\hat f$ est continue et tend vers 0 à l'infini (en tant que fonction de ξ). Cette dernière propriété est parfois appelée "lemme de Riemann-Lebesgue".

Preuve: La continuité est une conséquence du théorème de convergence dominée. Le lemme de Riemann-Lebesgue est une conséquence de la densité des fonctions de $C^1_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Il est possible d'inverser "explicitement" la transformée de Fourier grâce au théorème suivant:

Théorème: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

En d'autres termes, $[\mathcal{F}\mathcal{F}f](x) = (2\pi)^N f(-x)$. La formule précédente permet de définir f en tout point x de $\mathbb{R}^N$ (et non "presque partout") et fait alors de f une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$.

Remarque: Cette formule peut directement être vérifiée sur les couples (pour $x, \xi \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = e^{-x^2/2}; \qquad \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{1/2} e^{-\xi^2/2},$$

et

$$f(x) = e^{-|x|}; \qquad \hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

Le deuxième couple est lié à une application classique de l'analyse complexe. Le premier peut être mis en évidence à partir d'une équation différentielle simple: Si on note g la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$, on a

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2 - ix\xi}\, dx,$$

donc

$$g'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\,x)\, e^{-x^2/2 - ix\xi}\, dx$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} (-x - i\,\xi)\, e^{-x^2/2 - ix\xi}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, e^{-x^2/2 - ix\xi}\, dx$$

$$= -\xi\, g(\xi).$$

De plus $g(0) = (2\pi)^{1/2}$, donc $g(\xi) = (2\pi)^{1/2}\, e^{-\xi^2/2}$.

Preuve: On calcule (en utilisant le théorème de Fubini)

$$(2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,(x-y)\cdot\xi}\, e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi \right\} dy$$

$$= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}}.$$

On fait alors tendre ε vers 0.
Grâce au théorème de convergence dominée, on voit que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, e^{-\varepsilon \frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

uniformément pour $x \in \mathbb{R}^N$.
D'autre part, lorsque f est continue et bornée, on remarque que

$$(2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}}$$

$$= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x - \sqrt{\varepsilon}\, z)\, e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz.$$

Mais pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $f(x - \sqrt{\varepsilon}\, z) \to f(x)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ car f est continue, et

$$|f(x - \sqrt{\varepsilon}\, z)|\, e^{-\frac{|z|^2}{2}} \le ||f||_\infty\, e^{-\frac{|z|^2}{2}},$$

cette dernière fonction étant intégrable, donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}} = f(x).$$

Comme de plus

$$\left| (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}} - f(x) \right| \le 2\, ||f||_\infty,$$

la convergence à lieu dans $L^1(B(0,R))$ pour tout $R > 0$.
On conclut par un argument de densité. On sait que les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ peuvent être approchées (dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) par des fonctions continues à support compact. On en déduit que lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}} = f(x)$$

dans $L^1(B(0,R))$ pour tout $R > 0$. On a donc l'égalité demandée pour presque tout x.

Remarque: Le deuxième couple fonction/transformée de Fourier présenté en exemple illustre le lien entre régularité d'une fonction et comportement à l'infini de sa transformée de Fourier (et vice-versa). On peut en fait montrer la proposition suivante:

Proposition: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $x \mapsto |x|^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ et pour $|\alpha| \leq k$, $\partial_\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[x \mapsto (-i\,x)^\alpha f(x)](\xi)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^k(\mathbb{R}^N)$ telle que pour $|\alpha| \leq k$, $\partial_\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $\widehat{\partial_\alpha f}(\xi) = (i\,\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Preuve: La première partie de la proposition est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe somme.
La seconde formule s'obtient par intégration par parties (elle est immédiate lorsque $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$). Pour se ramener à un domaine borné, on introduit une famille de fonctions ϕ_n paires de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ de classe C^1 telle que

$$\phi_n|_{[0,n]} = 1, \qquad \phi_n|_{[n+1,+\infty[} = 0, \qquad |\phi_n'| \leq 2.$$

Le théorème de convergence dominée implique que pour toute fonction g de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ de $\phi_n\,g$ vers g et de $\phi_n' g$ vers 0. On remarque alors que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\,\partial_i f(x)\,\phi_n(x_i)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\,f(x)\,\phi_n'(x_i)\,dx$$

$$+\,i\,\xi_i \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\,f(x)\,\phi_n(x_i)\,dx.$$

On conclut en faisant tendre n vers l'infini.

La proposition précédente peut être vue comme une application d'un principe géneral (cf. paragraphe suivant): la transformée de Fourier échange la multiplication et la convolution. Ce principe s'illustre dans la proposition suivante:

Proposition: Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et (pour $\xi \in \mathbb{R}^N$)

$$\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi).$$

Soit $f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ tels que $\hat{f}, \hat{g} \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $f\,g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et

$$\widehat{f\,g}(\xi) = (2\pi)^{-N}\,(\hat{f} * \hat{g})(\xi).$$

Preuve: La première partie s'obtient par un changement de variable. La seconde partie s'obtient en applicant la formule de la première partie aux fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ et en utilisant le théorème d'inversion de Fourier. La preuve est un peu simplifiée quand on suppose que les fonctions sont paires.

On rappelle enfin l'identité de Plancherel, démontrée précédemment (afin d'illustrer le principe de prolongement des applications linéaires continues, dans le chapitre sur la complétude):

Théorème: Pour $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, et

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = (2\pi)^N \int f(x)^2 \, dx.$$

On rappelle qu'on en déduit (d'après le théorème de prolongement des applications linéaires continues donc) que la transformée de Fourier se prolonge en une "à $(2\pi)^N$ près"-isométrie de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Remarque: On voit que dans la proposition donnant la transformée de Fourier d'un produit, il suffit d'après le théorème de Plancherel de supposer que $f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$. En fait on peut montrer que cette proposition est vraie dès que $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, il faut pour cela savoir que la convolée de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, le théorème de Plancherel se retrouve à partir de la formule de la transformée de Fourier d'un produit en la prenant pour $f = g$ et en $\xi = 0$ (et en observant que $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$).

Proposition: Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$, on note $\tau_h f(x) = f(x+h)$ et $d_\lambda f(x) = f(\lambda\, x)$ la translatée et la dilatée de f. On a

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{i\, h \cdot \xi}\, \hat{f}(\xi)$$

et

$$\widehat{d_\lambda f}(\xi) = \lambda^{-N} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}) = \lambda^{-N} d_{\lambda^{-1}} \hat{f}(\xi).$$

Preuve: Ces formules s'obtiennent immédiatement par changement de variable.

Remarque: En utilisant les translations et les dilatations on obtient la transformée de Fourier d'une Gaussienne: si on note $M_{\rho,u,T}(x) = \frac{\rho}{(2\pi\, T)^{N/2}} e^{-\frac{|x-u|^2}{2T}}$ la Gaussienne de paramètres $\rho \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^N$, $T > 0$, on a

$$\widehat{M_{\rho,u,T}}(\xi) = \rho\, e^{-i\, u \cdot \xi - \frac{T}{2}\, |\xi|^2}$$

si bien qu'en utilisant l'injectivité de la transformée de Fourier, on a la formule (la somme de deux variables aléatoires gaussiennes est encore une variable aléatoire gaussienne):

$$M_{\rho_1,u_1,T_1} * M_{\rho_2,u_2,T_2} = M_{\rho_1\,\rho_2,u_1+u_2,T_1+T_2}.$$

A retenir absolument: L'ensemble des énoncés et démonstrations des résultats de cette sous-section.

7.2 Les distributions tempérées et leur transformée de Fourier

Position du problème: Au niveau formel (i.-e. sans se soucier de justifier les manipulations dans les formules), on voit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}f(\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\phi(\xi)\,e^{-i\,x\cdot\xi}\,d\xi\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathcal{F}\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

On en déduit qu'une formule permettant de définir la transformée de Fourier de distributions doit s'écrire

$$< \mathcal{F}T, \phi > = < T, \mathcal{F}\phi >,$$

si bien qu'on est amené à trouver un espace de fonctions aussi petit que possible (contenant $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$) qui soit stable par transformée de Fourier, ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ lui-même (les transformées de Fourier des fonctions de cet espace sont analytiques, et ne peuvent donc être à support compact, sauf s'il s'agit de la fonction nulle).

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des fonctions à décroissance rapide, défini comme l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ dont toutes les dérivées décroîssent plus vite que tout inverse de polynôme à l'infini. On a donc

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, p \in \mathbb{N}, ||f||_{p;\alpha} < +\infty\},$$

avec

$$||f||_{p;\alpha} := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^{p/2} |\partial_\alpha f(x)|.$$

On rappelle également la topologie (métrisable) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: c'est celle définie par la famille dénombrable de semi-normes (filtrantes) $\sup_{|\alpha|\le A} ||f||_{p;\alpha}$, $A, p \in \mathbb{N}$.

On peut vérifier par des calculs élémentaires que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est stable par les opérations de dérivation (de n'importe quel ordre) ∂_α et de multiplication par des monômes quelconques x^α (ces opérations sont continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). De plus, en utilisant des troncatures régulières, on observe que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (pour la topologie associée aux semi-normes qui la définissent).

Les formules montrant que la transformée de Fourier échange les dérivations avec les multiplications par des monômes permettent de montrer la stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ par transformée de Fourier.

Proposition: La transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, et est continue (pour la topologie associée aux semi-normes).

Preuve: On la fait dans le cas particulier où $N = 1$. On voit que

$$||\xi \mapsto (1+\xi^2)^k\, \hat{f}^{(l)}(\xi)||_{L^\infty(\mathbb{R})} = ||\pm \mathcal{F}((id - \frac{d^2}{dx^2})^k[(x \mapsto x^l)\, f])||_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\le ||((id - \frac{d^2}{dx^2})^k[(x \mapsto x^l)\, f])||_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\le ||\sum_{p=0}^{k}\sum_{r=0}^{2p} C_k^p\, C_{2p}^r [\frac{d^r}{dx^r}(x \mapsto x^l)]\, f^{(2p-r)}||_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\le Cte \sup_{q\le 2k, s\le l} ||(x \mapsto |x|^s)\, f^{(q)}||_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\le Cte\, ||f||_{l+2;2k}.$$

Finalement

$$||\hat{f}||_{2k,l} \le Cte\, ||f||_{l+2;2k}.$$

On rappelle ensuite la définition suivante:

Définition: On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ce sont les formes T qui vérifient pour certains $A, p \in \mathbb{N}$,

$$|<T, \phi>| \le Cte \sup_{|\alpha|\le A} ||\phi||_{p;\alpha}.$$

L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, dit “espace des distributions tempérées” s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'ensemble des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ (par restriction aux fonctions tests à support compact).

Remarque: Pour vérifier qu'une distribution est tempérée, il suffit de vérifier l'inégalité sur les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Définition: On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge (au sens des distributions tempérées) vers une distribution tempérée T lorsque pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a $< T_n, \phi > \to < T, \phi >$.

Exemple: Les fonctions de la forme $x \mapsto (1 + |x|^2)^{p/2} f(x)$, où $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $p \geq 0$, sont des distributions tempérées, ainsi que leurs dérivées partielles (au sens des distributions) d'ordre quelconque.

De manière plus générale, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est stable par les opérations de dérivation (de n'importe quel ordre) ∂_α et de multiplication par des monômes quelconques x^α.

On peut maintenant définir la transformée de Fourier des distributions tempérées:

Définition: Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on définit la transformée de Fourier $\hat{T}$ de T comme la distribution tempérée vérifiant (pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)

$$< \hat{T}, \phi > = < T, \hat{\phi} > .$$

Exemple: On voit que $\hat{\delta_0} = U_{x\to 1}$, et que $\mathcal{F}U_f = U_{\mathcal{F}f}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Proposition: Lorsque $T_n \to T$ au sens des distributions tempérées, on a $\mathcal{F}T_n \to \mathcal{F}T$ au sens des distributions tempérées également.

Preuve: C'est une conséquence directe de la définition.

Remarques: Beaucoup de formules écrites dans le cadre de la transformée de Fourier des fonctions restent valides pour la transformée de Fourier des distributions tempérées, avec une légère modification des notations.

Proposition: Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Alors

$$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^N \tilde{T},$$

où (par définition) $< \tilde{T}, \phi >=< T, x \mapsto \phi(-x) >$.

$$\widehat{\partial_\alpha T} = (i\,\cdot)^\alpha\,\hat{T},$$

$$\partial_\alpha \hat{T} = \mathcal{F}[x \mapsto (-i\,x)^\alpha\,T].$$

Preuve: C'est de nouveau une conséquence directe de la définition, et des mêmes formules pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Remarque: On peut déduire de ces formules les transformées de Fourier des polynômes et des dérivées d'ordre quelconque d'une masse de Dirac.

Remarque: Lorsque les formules

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g},$$

$$\widehat{f\,g} = (2\pi)^{-N}\,(\hat{f} * \hat{g}),$$

ont un sens, on peut également vérifier qu'elles restent valable pour les distributions tempérées: les formules de dérivation et de multiplication deviennent alors des cas particuliers de ces formules, car la convolée avec une dérivée de masse de Dirac équivaut à une dérivation.

En utilisant l'identité de Plancherel et les formules de dérivation et multiplication, on peut donner une caractérisation de $H^s(\mathbb{R}^N) := W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ pour $s \in \mathbb{N}$:

Proposition:

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N), \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2}\,\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Preuve: Il suffit d'utiliser la formule donnant la dérivée (au sens des distributions) d'une transformée de Fourier.

Remarque: Cette caractérisation permet de donner une définition naturelle de $H^s(\mathbb{R}^N)$ lorsque $s \in \mathbb{R}_+$ n'est pas nécessairement entier.

Proposition: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u, f \in L^2(\Omega)$ tels que $\Delta u = f$ sur Ω, au sens des distributions. Alors $u \in H^2_{loc}(\Omega)$.

Preuve: On observe que pour $\omega \subset \Omega$ avec $d(\omega, \Omega^c) > 0$, on peut construire une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que $\chi|_\omega = 1$. On a alors

$$\Delta(\chi\,u) = \chi\,f - u\,\Delta\chi + 2\nabla \cdot (u\,\nabla\chi).$$

En prolongeant de manière implicite par 0 ces fonctions sur $\mathbb{R}^N$, on obtient

$$-|\xi|^2\, \widehat{\chi\, u}(\xi) = \widehat{\chi\, f}(\xi) - \widehat{u\,\Delta\chi}(\xi) + 2i\,\xi \cdot \widehat{u\,\nabla\chi}(\xi).$$

On en déduit que

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^2\, |\widehat{\chi\, u}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty.$$

Une deuxième application de la formule (mais avec une fonction χ différente) conduit au résultat.

Corollaire: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u, f \in L^2(\Omega)$ tels que $\Delta u = f$ sur Ω, au sens des distributions. Si de plus $f \in C^\infty(\Omega)$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

A retenir absolument: La définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et les semi-normes associées; la définition de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$; la définition de la transformée de Fourier des distributions tempérées; le calcul de la transformée de Fourier des dérivées de masse de Dirac et des polynômes.