

Analyse asymptotique

Master de l'ENS de Cachan, parcours MN2MC
et master Modélisation et Simulation de l'INSTN

2004-05

1 La dérivation des équations de transport

1.1 La dérivation rigoureuse

On appelle répartition de Poisson de paramètre μ sur un sous-ensemble Λ de mesure finie (notée $|\Lambda|$) de \mathbb{R}^N une variable aléatoire (notée $\mathbf{c} = c_1, \dots, c_n$) à valeurs dans $\cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n$, vérifiant les propriétés suivantes : la loi de n est une loi de Poisson de paramètre $\mu |\Lambda|$, i-e $P(n = p) = \exp(-\mu |\Lambda|) \frac{(\mu |\Lambda|)^p}{p!}$, et pour n fixé, la loi de c_1, \dots, c_n est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $dc_1 \dots dc_n$ sur Λ^n .

On admet l'existence d'une telle répartition, qui modélise un milieu homogène où des éléments sont disposés indépendamment les uns des autres. On admet également que pour toute fonction g des éléments \mathbf{c} en question, l'espérance de cette fonction est donnée par la formule :

$$E(g(\mathbf{c})) = \exp(-\mu |\Lambda|) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{|\mu|^p}{p!} \int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} g(c_1, \dots, c_p) dc_1 \dots dc_p.$$

On s'intéresse à un flux de "petites" particules dans un milieu composé par des obstacles distribués de manière homogène. Dans cette première partie "rigoureuse", ces obstacles sont des sphères de rayon r qui absorbent les particules lorsque ces dernières les percutent.

Pour une configuration $\mathbf{c} = c_1, \dots, c_n$ d'éléments d'une répartition de Poisson (dorénavant donc nommés obstacles, supposés sphériques de rayon r), et $t \geq 0$, $x, v \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, on considère

$$h_{\mathbf{c}}(t, x, v) = f_{in}(x - vt) \mathbf{1}_{\{\forall i=1, \dots, n, s \in [0, t], \quad x - vs \notin B(c_i, r)\}}.$$

Cette quantité représente la densité de particules en vol libre qui n'ont pas été absorbées par des obstacles au temps t . Cette densité au temps 0 est supposée donnée par $(x, v) \mapsto f_{in}(x, v) \geq 0$.

Pour simplifier, on considère que f_{in} est à support compact (i.e. borné) dans les deux variables x et v , et on s'intéresse à des temps t suffisamment petits pour que $x - vs$ reste dans un ensemble borné Λ (quand $0 \leq s \leq t$).

On voit que (en désignant par E l'espérance par rapport à la répartition de Poisson)

$$\begin{aligned}
E(h_{\mathbf{c}}(t, x, v)) &= \exp(-\mu|\Lambda|) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{|\mu|^p}{p!} \int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} f_{in}(x - vt) \\
&\quad \times \mathbf{1}_{\{\forall i=1, \dots, n; \quad s \in [0, t], \quad x - vs \notin B(c_i, r)\}} dc_1 \dots dc_p \\
&= f_{in}(x - vt) \exp(-\mu|\Lambda|) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{|\mu|^p}{p!} \prod_{q=1}^p \int_{\Lambda} \mathbf{1}_{\{\forall s \in [0, t], \quad x - vs \notin B(c_q, r)\}} dc_q \\
&= f_{in}(x - vt) \exp(-\mu|\Lambda|) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{|\mu|^p}{p!} |\Lambda - \cup_{s \in [0, t]} B(x - vs, r)|^p \\
&= f_{in}(x - vt) \exp(-\mu|\Lambda|) \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{|\mu| (|\Lambda| - |S^{N-1}| |v| t r^{N-1} - |S^N| r^N)|^p}{p!} \\
&= f_{in}(x - vt) \exp(-\mu(|S^{N-1}| |v| t r^{N-1} + |S^N| r^N)).
\end{aligned}$$

On se place dans la limite dite de Boltzmann-Grad : $\mu \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 0$ avec $\mu |S^{N-1}| r^{N-1} \rightarrow \nu$ (et $\nu \neq 0$) dans laquelle le volume des obstacles tend vers 0 de telle sorte que le "libre parcours moyen" (c'est-à-dire la longueur parcourue en moyenne par une particule avant d'être absorbée) tende vers une limite finie. Dans cette limite, $E(h_{\mathbf{c}}(t, x, v)) \rightarrow f(t, x, v)$, avec

$$f(t, x, v) = f_{in}(x - vt) \exp(-\nu |v| t).$$

Cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = -\nu |v| f(t, x, v).$$

On a noté ∇_x pour le gradient par rapport à la variable x . Cette équation est une équation cinétique (i.e. le terme de gauche s'écrit $\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v)$) parfois appelée équation de transport avec absorption.

Dans le chapitre suivant, on présente plusieurs variantes de cette équation, sans entrer dans les détails d'une dérivation rigoureuse. On considère systématiquement le cas $N = 3$.

1.2 Dérivation heuristique

On considère toujours un milieu constitué de “petites” particules avançant entre des obstacles beaucoup plus massifs (on fait l’hypothèse que ces obstacles sont fixes et ont une densité donnée : étant massifs, ils ne sont pas perturbés par les collisions avec les petites particules).

On prend pour inconnue du problème la densité $f(t, x, v)$ de particules qui au temps t et à la position x possèdent la vitesse v .

On commence la dérivation heuristique d’une équation pour f , dans un contexte plus général que dans le chapitre précédent. S’il n’y avait pas de collisions avec les obstacles, la fonction f vérifierait

$$f(t + \tau, x + v\tau, v) = f(t, x, v). \quad (1)$$

En d’autres termes, les particules ont un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Cela signifie également que f serait solution de l’équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0. \quad (2)$$

On a dérivé pour cela la relation (1) par rapport à τ .

Lorsqu’on tient compte des collisions avec les obstacles, on a à tout instant (de taille dt) un nombre $\beta(|v|) dt$ de changement de vitesse (ou de disparition) d’une particule de vitesse v à la suite d’un choc avec un obstacle. Ce changement de vitesse a lieu sur un intervalle de temps très petit pendant lequel la particule reste confinée dans un domaine très restreint de l’espace. De plus, on note $K(v', v) dt$ le nombre de particules de vitesse v apparaissent en dt à la suite d’une percussion par une particule de vitesse v' sur un obstacle.

L’équation (2) devient alors

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = \int_{v'} K(v', v) f(t, x, v') dv' - \beta(|v|) f(t, x, v). \quad (3)$$

On note V l’espace dans lequel les vitesses v varient. Il est naturel de considérer que $V = \mathbb{R}^3$ pour des particules de matière (supposées non relativistes) telles que les neutrons, et que $V = S^2$ pour des photons.

On note d’autre part X l’espace dans lequel varie la position x . Il s’agit d’un sous-domaine de \mathbb{R}^3 , de frontière notée ∂X . On appelle $n(x)$ la normale unitaire extérieure à X en un point x de ∂X . On ajoute à l’équation (3) des conditions aux limites qui peuvent être :

1. Sur une frontière non physique $\Gamma \subset \partial\Omega$, la condition “entrante”

$$\forall t \geq 0, x \in \Gamma, v \in V \text{ tels que } v \cdot n(x) \leq 0,$$

$$f(t, x, v) = g(t, x, v),$$

où g est une fonction donnée. Ce type de frontière est utilisée dans les calculs numériques (que l’on effectue nécessairement sur un domaine borné).

2. Sur une frontière physique $\Gamma \subset \partial\Omega$, la condition de réflexion spéculaire

$$\forall t \geq 0, x \in \Gamma, v \in V \text{ tels que } v \cdot n(x) \leq 0,$$

$$f(t, x, v) = f(t, x, v - 2(v \cdot n(x))n(x)).$$

Enfin on ajoute à l’équation (3) une donnée initiale (définie pour $x \in X$, $v \in V$)

$$f(0, x, v) = f_{in}(x, v).$$

Le cas particulier dans lequel $\int_{v'} K(v', v) dv' = \beta(|v|)$ correspond à la situation très importante dans laquelle il y a conservation du nombre de particules.

On termine par une situation dans laquelle on suppose que les particules peuvent “saturer” les obstacles. Dans ce cas, les termes K et β peuvent dépendre de $\int f(t, x, w) dw$ en plus de v et v' .

2 L’équation de transport : analyse mathématique

On s’intéresse dans cette partie à l’analyse mathématique de l’équation (3) dans le cas particulier typique où $K(v', v) |S^2| = \beta(|v|) = \sigma$, avec σ constante (i.-e. indépendant de v) appelée opacité et $v \in S^2$ (cas des photons). On cherche donc $f \equiv f(t, x, v) \geq 0$ avec $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $v \in S^2$, vérifiant l’équation

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = \sigma \int_{v' \in S^2} f(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|} - \sigma f(t, x, v), \quad (4)$$

à laquelle on adjoint la condition initiale

$$f(0, x, v) = f_{in}(x, v). \quad (5)$$

2.1 Solutions fortes et faibles

On commence par définir les solutions fortes et faibles pour l'équation précédente :

Définition : Soit $T > 0$ et $f \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ (cela signifie que f admet des dérivées continues par rapport à toutes les variables et que f vaut 0 lorsque x varie en dehors d'un ensemble borné de \mathbb{R}^3). On dit que f est une solution forte (ou classique) de (4) – (5) lorsque les relations (4) et (5) sont vérifiées en tout point de $]0, T[\times \mathbb{R}^3 \times S^2$ et $\mathbb{R}^3 \times S^2$ respectivement.

Définition : Soit $T > 0$ et $f \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ (cela signifie que f est bornée). On dit que f est une solution faible de (20–5) lorsque $f_{in} \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times S^2)$ et pour toute fonction $\phi \in C_c^1([0, T[\times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ (cela impose que ϕ s'annule au voisinage de $t = T$), on a

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(t, x, v) \left(\partial_t \phi(t, x, v) + v \cdot \nabla_x \phi(t, x, v) - \sigma \phi(t, x, v) \right) dv dx dt \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi(0, x, v) dv dx \\ + \sigma \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \int_{S^2} f(t, x, v') \phi(t, x, v) \frac{dv'}{|S^2|} dv dx dt. \end{aligned}$$

On commence par vérifier la cohérence des définitions de solutions fortes et faibles :

Proposition : Toute solution forte de (4) – (5) est également solution faible. Réciproquement, toute solution faible de (4) – (5) qui de plus est de classe $C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ est une solution forte.

Preuve : Si f est une solution forte, on la multiplie par $\phi \in C_c^1([0, T[\times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ et on intègre le résultat sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2$. On conclut alors par intégration par partie dans les variables t et x . Il n'apparaît pas de termes de bord dans la variable x puisque ϕ s'annule en dehors d'un borné dans cette variable. De même, il n'apparaît pas de terme correspondant au temps $t = T$ car ϕ s'annule en ce temps. Le terme de bord correspondant au temps $t = 0$ fournit la quantité $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi(0, x, v) dv dx$ une fois qu'on a utilisé l'équation sur la donnée initiale.

On suppose maintenant que f est une solution faible de (4) – (5) et que $f \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$. Après intégration par partie (que l'on est en droit d'effectuer puisque f et ϕ sont de classe C^1) et traitement des termes de bord comme dans le calcul précédent, on obtient la relation

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \phi(t, x, v) \left\{ \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) \right. \\ & \quad \left. + \sigma f(t, x, v) - \sigma \int_{S^2} f(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|} \right\} dv dx dt \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \left(f_{in}(x, v) - f(0, x, v) \right) \phi(0, x, v) dv dx. \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour $\phi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$.

On utilise systématiquement le résultat suivant d'analyse fonctionnelle : Si U est un ouvert de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), $f \in L^1 \cup L^\infty(U)$, et $\int_U f \psi = 0$ pour tout $\psi \in C_c^\infty(U)$, alors $f = 0$ presque partout (et $f = 0$ si f est continue).

On commence par prendre $\phi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$. Pour de telles fonctions (qui s'annulent en $t = 0$), on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \phi(t, x, v) \left\{ \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \sigma f(t, x, v) \right. \\ & \quad \left. - \sigma \int_{S^2} f(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|} \right\} dv dx dt = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \sigma f(t, x, v) = \sigma \int_{S^2} f(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|}.$$

Donc, pour $\phi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f_{in}(x, v) - f(0, x, v)) \phi(0, x, v) dv dx = 0.$$

Mais toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times S^2)$ s'écrit sous la forme $\phi(0, x, v)$ avec $\phi \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$, il suffit en effet de prendre

$$\phi(t, x, v) = \chi(t) \psi(x, v),$$

avec χ de classe $C_c^1([0, T])$ vérifiant $\chi(0) = 1$. On conclut que $f(0, x, v) = f_{in}(x, v)$.

2.2 Existence et Unicité

On commence par montrer un théorème simple d'unicité des solutions fortes.

Proposition : Soit $f_{in} \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)$, et $f_1, f_2 \in C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ deux solutions fortes de (4) – (5). Alors $f_1 = f_2$.

Preuve : On écrit l'équation sur $f_1 - f_2$:

$$\begin{aligned} \partial_t(f_1 - f_2)(t, x, v) + v \cdot \nabla_x(f_1 - f_2)(t, x, v) + \sigma(f_1 - f_2)(t, x, v) \\ = \sigma \int_{S^2} (f_1 - f_2)(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|}. \end{aligned}$$

On la multiplie par $f_1 - f_2$ et on intègre sur $\mathbb{R}^3 \times S^2$ (mais pas sur la variable de temps). On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |(f_1 - f_2)(t, x, v)|^2 dv dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} v \cdot \nabla_x |(f_1 - f_2)(t, x, v)|^2 dv dx \\ = \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \left(\int_{S^2} f(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|} \right)^2 dv dx - \sigma \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |(f_1 - f_2)(t, x, v)|^2 dv dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $f_1 - f_2$ s'annule en dehors d'un borné (pour la variable x) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Jensen), on obtient

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |(f_1 - f_2)(t, x, v)|^2 dv dx \leq 0,$$

si bien que $f_1 = f_2$.

On souhaite maintenant démontrer un théorème d'existence pour les solutions fortes. On propose une méthode de calcul qui permet en fait d'écrire la solution semi-explicite (i.e. sous forme d'une série faisant intervenir des intégrales à paramètre) pour l'équation de transport.

On part de l'équation

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = \sigma \int_{S^2} f(t, x, v') \frac{dv'}{|S^2|} - \sigma f(t, x, v).$$

On pose (cela revient à utiliser la méthode des caractéristiques)

$$f^\sharp(t, x, v) = f(t, x + vt, v).$$

On a alors

$$\frac{d}{dt} f^\sharp(t, x, v) = \partial_t f(t, x + vt, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x + vt, v),$$

si bien que

$$\frac{d}{dt} f^\sharp(t, x, v) = \sigma \int_{S^2} f(t, x + vt, v') \frac{dv'}{|S^2|} - \sigma f^\sharp(t, x, v).$$

Donc (cela revient à utiliser la méthode de variation des constantes)

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\sigma t} f^\sharp(t, x, v) \right) = \sigma e^{\sigma t} \int_{S^2} f(t, x + vt, v') \frac{dv'}{|S^2|},$$

et après intégration

$$e^{\sigma t} f^\sharp(t, x, v) - f^\sharp(0, x, v) = \sigma \int_0^t e^{\sigma s} \int_{S^2} f(s, x + vs, v') \frac{dv'}{|S^2|} ds,$$

soit

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= f(0, x - vt, v) e^{-\sigma t} \\ &+ \sigma \int_0^t e^{-\sigma(t-t_1)} \int_{w_1 \in S^2} f(t_1, x - v(t-t_1), w_1) \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1. \end{aligned}$$

On applique alors cette formule “à elle-même” :

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= f(0, x - vt, v) e^{-\sigma t} \\ &+ \sigma \int_0^t e^{-\sigma(t-t_1)} \int_{w_1 \in S^2} f(0, x - v(t-t_1) - w_1 t_1, w_1) e^{-\sigma t_1} \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1 \\ &\quad + \sigma^2 \int_0^t e^{-\sigma(t-t_1)} \int_{w_1 \in S^2} \int_0^{t_1} e^{-\sigma(t_1-t_2)} \int_{w_2 \in S^2} \\ &\quad f(t_2, x - v(t-t_1) - w_1(t_1-t_2), w_2) \frac{dw_2}{|S^2|} dt_2 \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1 \\ &= f(0, x - vt, v) e^{-\sigma t} \\ &+ \sigma e^{-\sigma t} \int_0^t \int_{w_1 \in S^2} f(0, x - v(t-t_1) - w_1 t_1, w_1) \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1 \\ &\quad + \sigma^2 \int_0^t \int_0^{t_1} \int_{w_1 \in S^2} \int_{w_2 \in S^2} \end{aligned}$$

$$e^{-\sigma(t-t_2)} f(t_2, x - v(t-t_1) - w_1(t_1-t_2), w_2) \frac{dw_2}{|S^2|} dt_2 \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1.$$

Raisonnant par récurrence, puis passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= f(0, x - vt, v) e^{-\sigma t} \\ &+ \sigma e^{-\sigma t} \int_0^t \int_{w_1 \in S^2} f_{in}(x - v(t-t_1) - w_1 t_1, w_1) \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1 \\ &+ \sum_{N=1}^{+\infty} \sigma^{N+1} e^{-\sigma t} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_N} \int_{w_1 \in S^2} \int_{w_2 \in S^2} \dots \int_{w_{N+1} \in S^2} \\ &f_{in}(x - v(t-t_1) - w_1(t_1-t_2) - \dots - w_N(t_N-t_{N+1}) - w_{N+1} t_{N+1}, w_{N+1}) \\ &\frac{dw_{N+1}}{|S^2|} \dots \frac{dw_1}{|S^2|} dt_{N+1} \dots dt_1. \end{aligned}$$

L'utilisation de cette formule permet de démontrer le théorème suivant :

Proposition : Soit $f_{in} \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)$. Alors l'unique solution forte de (4) – (5) est donnée par la formule

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= f(0, x - vt, v) e^{-\sigma t} \\ &+ \sigma e^{-\sigma t} \int_0^t \int_{w_1 \in S^2} f_{in}(x - v(t-t_1) - w_1 t_1, w_1) \frac{dw_1}{|S^2|} dt_1 \\ &+ \sum_{N=1}^{+\infty} \sigma^{N+1} e^{-\sigma t} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_N} \int_{w_1 \in S^2} \int_{w_2 \in S^2} \dots \int_{w_{N+1} \in S^2} \\ &f_{in}(x - v(t-t_1) - w_1(t_1-t_2) - \dots - w_N(t_N-t_{N+1}) - w_{N+1} t_{N+1}, w_{N+1}) \\ &\frac{dw_{N+1}}{|S^2|} \dots \frac{dw_1}{|S^2|} dt_{N+1} \dots dt_1. \end{aligned}$$

Preuve : L'unicité est déjà démontrée. Il suffit de vérifier que la formule fournit bien une solution de (4) – (5). Cela s'obtient par une simple vérification (on applique la formule de dérivation des intégrales qui dépendent d'un paramètre intervenant à la fois dans l'intégrande et les bornes).

2.3 Propriétés qualitatives

Parmi les conséquences de la formule précédente, on a la propagation à vitesse au plus 1 de la solution. Cela signifie que si f_{in} a son support (dans la variable x) dans $B(0, R)$ (pour $R > 0$), alors $f(t, \cdot)$ a son support (toujours dans la variable x) dans $B(0, R + t)$. En effet, il suffit de vérifier que

$$|v(t - t_1) + w_1(t_1 - t_2) + \dots + w_N(t_N - t_{N+1}) + w_{N+1}t_{N+1}| \leq 1$$

lorsque $w_1, \dots, w_{N+1} \in S^2$ et $0 \leq t_{N+1} \leq \dots \leq t_1 \leq t$.

D'autre part,

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq e^{-\sigma t} \left(1 + \sigma t + \sum_{N=1}^{+\infty} \sigma^{N+1} \frac{t^{N+1}}{(N+1)!} \right) \|f_{in}\|_{L^\infty} \leq \|f_{in}\|_{L^\infty}.$$

On a donc un principe du maximum.

Enfin, par utilisation de l'inégalité de Jensen, pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\|f(t, \cdot)\|_{L^p} \leq e^{-\sigma t} \left(1 + \sigma t + \sum_{N=1}^{+\infty} \sigma^{N+1} \frac{t^{N+1}}{(N+1)!} \right) \|f_{in}\|_{L^p} \leq \|f_{in}\|_{L^p}.$$

On peut également étudier la propagation de la régularité et des singularités pour cette équation.

Dans de nombreuses situations, $\sigma \gg 1$ (le milieu est alors dit opaque). Le traitement de l'équation de transport se fait dans ce cas par l'analyse asymptotique, qui est décrite dans le prochain chapitre.

3 analyse asymptotique

3.1 introduction

En physique, de nombreux problèmes font intervenir des échelles de temps (ou d'espace) différentes. On est donc amené à faire intervenir dans les équations des paramètres petits, notés ε par exemple, qui représentent le rapport entre deux paramètres (exprimés dans la même unité) de valeurs très différentes.

Les équations s'écrivent alors sous la forme

$$F(\partial_\alpha u_\varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

où u est l'inconnue, ∂_α représente l'ensemble des dérivées partielles et ε est un petit paramètre.

Lorsque F est continue par rapport à la seconde variable, on parle de perturbation régulière et l'on s'attend à ce que u_ε converge vers u quand ε tend vers 0, où u est solution de

$$F(\partial_\alpha u, 0) = 0.$$

Il arrive malheureusement souvent que F ne soit pas continue (ou pas définie) en 0 par rapport à la seconde variable. On dit alors que l'on a une perturbation singulière (on peut parfois se ramener tout de même à la situation précédente en transformant l'équation en une équation équivalente).

On se heurte souvent à un problème de conditions aux limites : celles relatives à l'équation

$$F(\partial_\alpha u_\varepsilon, \varepsilon) = 0$$

(pour $\varepsilon > 0$) ne sont pas forcément les mêmes que celles relatives à l'équation

$$F(\partial_\alpha u, 0) = 0.$$

Il y a alors apparition de "couches limites" (appelées "couches initiales" lorsqu'elles concernent la donnée en $t = 0$).

Un exemple typique de ce phénomène est fourni par l'équation de Navier-Stokes (incompressible) avec grand nombre de Reynolds (situation très courante)

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u + \nabla_x p = \varepsilon \Delta_x u, \quad \nabla_x \cdot u = 0.$$

La perturbation est régulière (on s'attend à ce que la limite soit solution de l'équation d'Euler (incompressible)

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u + \nabla_x p = 0, \quad \nabla_x \cdot u = 0.$$

Par contre les conditions aux limites naturelles au bord d'un obstacle (on appelle n la normale extérieure unitaire en un point de la frontière de l'obstacle) pour l'équation de Navier-Stokes sont de type $u = 0$, alors qu'elles sont de type $u \cdot n = 0$ pour l'équation d'Euler.

Avant de voir l'approximation de la diffusion pour les équations de transport (une perturbation singulière typique, lorsqu'on pose $\varepsilon = 1/\sigma$), on commence par un cas plus simple : les équations différentielles et leurs applications à la cinétique chimique. Des démonstrations élémentaires complètes peuvent être proposées dans ce cas.

3.2 Equations différentielles

3.2.1 Rappels

On appelle système de N équations différentielles (à N inconnues) une relation du type

$$x' = a(t, x), \quad (6)$$

où $a : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ (I étant un intervalle de \mathbb{R}).

Une solution de l'équation (6) est une application $t \mapsto x(t)$ de $C^1(I, \mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t, x(t)).$$

Tout système d'équations d'ordre supérieur peut en fait se mettre sous la forme (6), quitte à augmenter N . Il peut même être mis sous une forme autonome, c'est-à-dire avec une fonction a qui ne dépend pas explicitement de t .

Exemple : On considère le système

$$\begin{cases} x'' = x' + y' + y^2, \\ y'' = x' y' + t. \end{cases} \quad (7)$$

On pose $x_1 = x'$, $x_2 = x$, $x_3 = y'$, et $x_4 = y$. Le système (7) devient alors

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3 + x_4^2, \\ x_2' = x_1, \\ x_3' = x_1 x_3 + t, \\ x_4' = x_3. \end{cases}$$

Si on le souhaite, on peut poser $x_5 = t$, et obtenir le système autonome

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3 + x_4^2, \\ x_2' = x_1, \\ x_3' = x_1 x_3 + x_5, \\ x_4' = x_3, \\ x_5' = 1. \end{cases}$$

L'ensemble des résultats élémentaires d'existence et d'unicité sur les équations de type (6) se résume en le théorème suivant :

Théorème : On considère un intervalle $I = [t_0, T_0[$ de \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}^N$, et une condition initiale

$$x(t_0) = x_0, \quad (8)$$

ainsi qu'une fonction $a : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 .

1. Soit $t_1 \in]t_0, T_0[$. La fonction x est solution de (6), (8) sur $[t_0, t_1[$ si et seulement si x est continue sur $[t_0, t_1[$ et

$$\forall t \in [t_0, t_1[, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s, x(s)) ds.$$

2. (existence : Cauchy-Arzelà) Si a est continue, alors il existe $t_1 \in]t_0, T_0[$ et x solution de (6), (8) sur $[t_0, t_1[$.
3. (unicité : Cauchy-Lipschitz) Si a est de classe C^1 (ou, plus généralement localement Lipschitzienne), alors deux solutions x_1, x_2 de (6), (8) sur $[t_0, t_1[$ sont identiques ($x_1 = x_2$).
4. (théorème des bouts) Soit $t_1 \in]t_0, T_0[$ et x solution de (6), (8) sur $[t_0, t_1[$. Alors soit $t_1 = T_0$, soit x peut se prolonger sur $[t_0, t_1 + \varepsilon[$ en une solution de (6), (8) pour un certain $\varepsilon > 0$, soit enfin il existe une suite $\tau_n \rightarrow t_1$ telle que $|x(\tau_n)| \rightarrow +\infty$.
5. Si a est à croissance au plus linéaire, i.-e. il existe $C > 0$ telle que

$$\forall t \in I, \quad |a(t, x)| \leq C(1 + |x|),$$

alors il existe x solution de (6), (8) sur I . Cela reste valide si a est globalement Lipschitzienne, ou même s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall t \in I, \quad (a(t, x) - a(t, y)) \cdot (x - y) \leq C|x - y|^2.$$

3.2.2 Perturbations régulières

On commence par le résultat élémentaire suivant de stabilité :

Lemme (Gronwall) : Soit $x \in C([t_0, T], \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\forall t \in [t_0, T], \quad |x(t)| \leq C + K \int_{t_0}^t |x(s)| ds.$$

Alors

$$\forall t \in [t_0, T], \quad |x(t)| \leq C e^{K(t-t_0)}.$$

Preuve : On remarque que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-Kt} \int_{t_0}^t |x(s)| ds \right) \leq C e^{-Kt}.$$

Donc

$$\int_{t_0}^t |x(s)| ds \leq \frac{C}{K} \left[e^{K(t-t_0)} - 1 \right],$$

et

$$|x(t)| \leq C e^{K(t-t_0)}.$$

On énonce maintenant un théorème de continuité des solutions d'une équation différentielle par rapport à ses coefficients. Pour simplifier, on se contente du cas globalement Lipschitzien, et (sans restreindre en fait la généralité) on ne considère que le cas autonome. En d'autres termes, on prend $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ vérifiant pour un certain $K > 0$,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |a(x) - a(y)| \leq K |x - y|. \quad (9)$$

On montre le

Théorème : Soit $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ vérifiant (9) pour un certain $K > 0$, et x, y des solutions sur $[t_0, T]$ des équations

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (10)$$

et

$$\begin{cases} y'(t) = a(y(t)) + \phi(t), \\ y(0) = x_0 + \delta, \end{cases} \quad (11)$$

où $\delta \in \mathbb{R}^N$ et ϕ est continue sur $[t_0, T]$.

Alors

$$\forall t \in [t_0, T], \quad |x(t) - y(t)| \leq \left(|\delta| + (T - t_0) \|\phi\|_\infty \right) e^{K(t-t_0)}.$$

Preuve : On écrit pour $t \in [t_0, T]$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(x(s)) ds,$$

$$y(t) = x_0 + \delta + \int_{t_0}^t a(y(s)) ds + \int_{t_0}^t \phi(s) ds.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |\delta| + \int_{t_0}^t |\phi(s)| ds + \int_{t_0}^t |a(x(s)) - a(y(s))| ds \\ &\leq |\delta| + (T - t_0) \|\phi\|_\infty + K \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \end{aligned}$$

si bien que l'on conclut avec le lemme de Gronwall.

Ce résultat s'interprète de la manière suivante en terme de perturbations (régulières) : si a est une fonction de $\mathbb{R}^N \times [0, \varepsilon_0]$ dans \mathbb{R}^N (pour $\varepsilon_0 > 0$) continue par rapport à la seconde variable et globalement Lipschitzienne par rapport à la première (uniformément par rapport à la seconde) et si s est une fonction de $[0, \varepsilon_0]$ dans \mathbb{R}^N (pour $\varepsilon_0 > 0$) continue, alors la solution x_ε de l'équation

$$\begin{cases} x'_\varepsilon(t) = a(x_\varepsilon(t), \varepsilon), \\ x(0) = s(\varepsilon), \end{cases} \quad (12)$$

converge uniformément sur tout intervalle borné de \mathbb{R} vers la solution x_0 de l'équation

$$\begin{cases} x'_0(t) = a(x_0(t), 0), \\ x(0) = s(0), \end{cases} \quad (13)$$

3.2.3 La cinétique chimique et les perturbations singulières

Les réactions chimiques peuvent se décomposer en une suite de réactions élémentaires du type

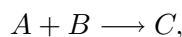


où les produits A_i, B_j ne sont pas nécessairement distincts, et, en général, $n = 1, 2$ ou, au maximum, $n = 3$.

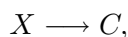
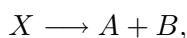
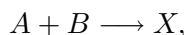
Chaque fois qu'un produit P figure parmi les B_j , sa concentration augmente à la vitesse $k a_1 \dots a_n$, où a_i est la concentration de A_i et la constante de proportionnalité k est dite constante de la réaction. Chaque fois que P figure parmi les A_i , sa concentration diminue à la vitesse $k a_1 \dots a_n$.

En tenant compte des différentes réactions élémentaires, on obtient un système d'équations différentielles portant sur les concentrations des produits.

Exemple : On considère une réaction du type



qui se décompose en réactions élémentaires



dont les constantes respectives sont notées k_1, k_{-1}, k_2 .

On obtient alors le système d'équations différentielles

$$a' = -k_1 ab + k_{-1} x,$$

$$b' = -k_1 ab + k_{-1} x,$$

$$x' = k_1 ab - (k_{-1} + k_2) x,$$

$$c' = k_2 x.$$

En observant d'une part que c n'intervient pas dans les trois premières équations, et d'autre part que $a' = b'$, on voit que $b(t) = a(t) - a(0) + b(0)$, et donc le système peut être réécrit

$$a'(t) = -k_1 a(t) (a(t) - a(0) + b(0)) + k_{-1} x(t),$$

$$x'(t) = k_1 a(t) (a(t) - a(0) + b(0)) - (k_{-1} + k_2) x(t).$$

Le résultat obtenu est donc un système de deux équations autonomes non-linéaires.

Dans de nombreux cas, X est un produit très réactif (appelé intermédiaire de réaction) si bien que $k_{-1}, k_2 \gg k_1$. Un exemple de valeurs numériques ($-a(0) + b(0) = 1$, $k_1 = 1$, $k_{-1} = k_2 = \frac{1}{\varepsilon}$) fournit le système

$$a' = -a(a+1) + \frac{x}{\varepsilon},$$

$$x' = a(a+1) - 2\frac{x}{\varepsilon}.$$

On voit que l'on ne peut pas appliquer la théorie des perturbations régulières à ce système pour trouver la limite de a et x lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Le changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$ amène au système

$$\begin{aligned} a' &= -a(a+1) + y, \\ \varepsilon y' &= a(a+1) - 2y. \end{aligned}$$

Le passage à la limite "formel" dans ce système donne

$$0 = a(a+1) - 2y,$$

puis

$$a' = -\frac{1}{2}a(a+1).$$

Les conditions initiales posent des problèmes spécifiques que nous étudierons dans la suite. Dans les conditions normales le produit X est de concentration nulle en début de réaction. On justifie le calcul formel par le

Théorème : Soit $a_\varepsilon, x_\varepsilon$ la solution unique (sur $[0, T_\varepsilon^*]$ où T_ε^* est le temps maximal d'existence de la solution en question) du système

$$a'_\varepsilon = -a_\varepsilon(a_\varepsilon + 1) + \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad a_\varepsilon(0) = \alpha > 0, \quad (14)$$

$$x'_\varepsilon = a_\varepsilon(a_\varepsilon + 1) - 2\frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad x_\varepsilon(0) = 0. \quad (15)$$

D'autre part, soit a la solution (sur \mathbb{R}_+) de l'équation

$$a' = -\frac{1}{2}a(a+1), \quad a(0) = \alpha.$$

Alors $T_\varepsilon^* = +\infty$, et pour tout $T > 0, t \in [0, T]$,

$$0 \leq x_\varepsilon(t) \leq \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\varepsilon,$$

$$|a_\varepsilon(t) - a(t)| \leq \frac{1}{4}\alpha(\alpha+1)e^{(\alpha+\frac{1}{2})T}\varepsilon.$$

Preuve : On ne note pas la dépendance en ε des différents temps intervenant dans la preuve.

1ère étape : Pour $t \in]0, T^*[$, on a $x_\varepsilon(t) > 0$ et $a_\varepsilon(t) > 0$.

On commence par remarquer que $a_\varepsilon(0) = \alpha > 0$ et $x_\varepsilon(0) = 0, x'_\varepsilon(0) = a_\varepsilon(0)(a_\varepsilon(0) + 1) = \alpha(\alpha + 1) > 0$. On en déduit que $T^{**} = \sup\{t > 0, /x_\varepsilon, a_\varepsilon > 0 \text{ sur }]0, t\}$ est bien défini, et de plus $T^{**} > 0$.

Si $T^{**} < T^*$, on est alors dans l'une des trois situations suivantes : soit $a_\varepsilon(T^{**}) = x_\varepsilon(T^{**}) = 0$, soit $a_\varepsilon(T^{**}) > 0, x_\varepsilon(T^{**}) = 0$, soit $a_\varepsilon(T^{**}) = 0, x_\varepsilon(T^{**}) > 0$. Mais dans le premier cas, on a (par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz) $a_\varepsilon(0) = x_\varepsilon(0) = 0$, ce qui est contraire aux hypothèses. Dans le second cas, $x'_\varepsilon(T^{**}) > 0$, ce qui est impossible. Enfin dans le dernier cas, $a'_\varepsilon(T^{**}) > 0$, ce qui est également impossible.

Finalement, on obtient que $T^{**} = T^*$, ou, en d'autres termes, $x_\varepsilon(t) > 0$ et $a_\varepsilon(t) > 0$ sur $]0, T^*[$. On observe alors en additionnant (14) et (15) que $a'_\varepsilon(t) + x'_\varepsilon(t) \leq 0$. On en déduit que $a_\varepsilon(t) + x_\varepsilon(t) \leq \alpha$ sur $]0, T^*[$. Finalement,

$$0 < a_\varepsilon(t) \leq \alpha, \quad 0 < x_\varepsilon(t) \leq \alpha, \quad (16)$$

sur $]0, T^*[$. D'après le théorème des bouts, on voit que $T^* = +\infty$.

2ème étape : On a $0 < x_\varepsilon(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \alpha (\alpha + 1)$ sur $]0, +\infty[$.

D'après la deuxième équation,

$$x'_\varepsilon + 2 \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon} = a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1),$$

si bien que

$$(x_\varepsilon e^{2t/\varepsilon})' = a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1) e^{2t/\varepsilon}.$$

On en déduit que

$$x_\varepsilon(t) e^{2t/\varepsilon} - x_\varepsilon(0) = \int_0^t a_\varepsilon(s) (a_\varepsilon(s) + 1) e^{2s/\varepsilon} ds,$$

soit

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t)| &\leq e^{-2t/\varepsilon} \alpha (\alpha + 1) \frac{e^{2t/\varepsilon} - 1}{2/\varepsilon} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \alpha (\alpha + 1). \end{aligned}$$

3ème étape : On conclut.

En additionnant (14) à la moitié de (15), on obtient

$$a'_\varepsilon + \frac{1}{2} x'_\varepsilon = -\frac{1}{2} a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1),$$

si bien que

$$a'_\varepsilon - a' = \left[-\frac{1}{2} a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1)\right] - \left[-\frac{1}{2} a (a + 1)\right] - \frac{1}{2} x'_\varepsilon,$$

et donc

$$\begin{aligned}
|a_\varepsilon(t) - a(t)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |a_\varepsilon(s) (a_\varepsilon(s) + 1) \\
&\quad - a(s) (a(s) + 1)| ds + \frac{1}{2} |x_\varepsilon(t)| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \left(|a_\varepsilon(s)| |a_\varepsilon(s) - a(s)| + |a(s) + 1| |a_\varepsilon(s) - a(s)| \right) ds + \frac{1}{2} |x_\varepsilon(t)| \\
&\leq \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \int_0^t |a_\varepsilon(s) - a(s)| ds + \frac{\varepsilon}{4} \alpha (\alpha + 1).
\end{aligned}$$

On conclut enfin par utilisation du lemme de Gronwall.

3.2.4 La couche initiale

Le théorème précédent reste valide lorsque la condition initiale $x_\varepsilon(0) = 0$ est remplacée par une condition du type $x_\varepsilon(0) = \varepsilon \xi$. Par contre, le résultat ne peut subsister quand $x_\varepsilon(0) = \xi$ (la conclusion impliquait en effet que $x_\varepsilon(0) \rightarrow 0$). Le résultat que l'on peut démontrer est le suivant :

Théorème : Soit $a_\varepsilon, x_\varepsilon$ la solution unique (sur $[0, T^*]$ où T^* est le temps maximal d'existence de la solution en question) du système

$$a'_\varepsilon = -a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1) + \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad a_\varepsilon(0) = \alpha > 0, \quad (17)$$

$$x'_\varepsilon = a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1) - 2 \frac{x_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad x_\varepsilon(0) = \xi > 0. \quad (18)$$

D'autre part, soit a la solution (sur \mathbb{R}_+) de l'équation

$$a' = -\frac{1}{2} a (a + 1), \quad a(0) = \alpha + \xi/2.$$

Alors $T^* = +\infty$, et pour tout $T > 0, t \in [0, T]$,

$$|x_\varepsilon(t) - \xi e^{-2t/\varepsilon}| \leq \frac{\varepsilon}{2} (\alpha + \xi) (\alpha + \xi + 1), \quad (19)$$

$$|a_\varepsilon(t) + \frac{\xi}{2} e^{-2t/\varepsilon} - a(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} (\alpha + \xi) \left(\alpha + \frac{5}{4} \xi + 1 \right) e^{(\alpha + \frac{3}{2} \xi + \frac{1}{2}) T}.$$

Preuve : En utilisant le même raisonnement que dans le théorème précédent, on obtient que $T^* = +\infty$, que a_ε et x_ε sont strictement positifs

sur $]0, +\infty[$, et que $a'_\varepsilon(t) + x'_\varepsilon(t) \leq 0$. Donc $a_\varepsilon(t) \leq \alpha + \xi$ et $x_\varepsilon(t) \leq \alpha + \xi$ sur $]0, +\infty[$.

Toujours comme auparavant, on a

$$(x_\varepsilon e^{2t/\varepsilon})' = a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1) e^{2t/\varepsilon}.$$

Mais on en déduit maintenant que

$$x_\varepsilon(t) e^{2t/\varepsilon} - \xi = \int_0^t a_\varepsilon(s) (a_\varepsilon(s) + 1) e^{2s/\varepsilon} ds,$$

soit

$$x_\varepsilon(t) - \xi e^{-2t/\varepsilon} = \int_0^t a_\varepsilon(s) (a_\varepsilon(s) + 1) e^{-2(t-s)/\varepsilon} ds.$$

Donc

$$|x_\varepsilon(t) - \xi e^{-2t/\varepsilon}| \leq (\alpha + \xi) (\alpha + \xi + 1) \int_0^t e^{-2(t-s)/\varepsilon} ds,$$

d'où l'estimation (19).

On note dorénavant

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - \xi e^{-2t/\varepsilon}, \quad \tilde{a}_\varepsilon(t) = a_\varepsilon(t) + \frac{\xi}{2} e^{-2t/\varepsilon}.$$

Enfin,

$$a'_\varepsilon - a' = \left[-\frac{1}{2} a_\varepsilon (a_\varepsilon + 1)\right] - \left[-\frac{1}{2} a (a + 1)\right] - \frac{1}{2} x'_\varepsilon,$$

soit

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(t) - a(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t \left[a_\varepsilon(s) (a_\varepsilon(s) + 1) - a(s) (a(s) + 1) \right] ds \\ &\quad + \alpha - a(0) - \frac{\xi}{2} (e^{-2t/\varepsilon} - 1) - \frac{1}{2} \tilde{x}_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

ce qui justifie la valeur de $a(0)$ choisie dans ce théorème.

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\varepsilon(t) - a(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t \left[(\tilde{a}_\varepsilon(s) - \frac{\xi}{2} e^{-2s/\varepsilon}) (\tilde{a}_\varepsilon(s) - \frac{\xi}{2} e^{-2s/\varepsilon} + 1) \right. \\ &\quad \left. - a(s) (a(s) + 1) \right] ds - \frac{1}{2} \tilde{x}_\varepsilon(t) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^t \left[\tilde{a}_\varepsilon(s) (\tilde{a}_\varepsilon(s) + 1) - a(s) (a(s) + 1) \right] ds + y_\varepsilon(t),$$

et

$$\begin{aligned} |y_\varepsilon(t)| &\leq \frac{\xi}{4} \int_0^t e^{-2s/\varepsilon} |\tilde{a}_\varepsilon(s) - \frac{\xi}{2} e^{-2s/\varepsilon} + 1| ds \\ &\quad + \frac{\xi}{4} \int_0^t e^{-2s/\varepsilon} |\tilde{a}_\varepsilon(s)| ds + \frac{1}{2} |\tilde{x}_\varepsilon(t)| \\ &\leq (\|\tilde{a}_\varepsilon\|_\infty + \|a_\varepsilon\|_\infty + 1) \frac{\xi}{4} \int_0^t e^{-2s/\varepsilon} ds + \frac{\varepsilon}{4} (\alpha + \xi) (\alpha + \xi + 1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \left(\left(\alpha + \frac{5}{4}\xi + \frac{1}{2} \right) \xi + (\alpha + \xi + 1) (\alpha + \xi) \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} (\alpha + \xi) \left(\alpha + \frac{5}{4}\xi + 1 \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$|\tilde{a}_\varepsilon(t) - a(t)| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|a_\varepsilon\|_\infty + \frac{1}{2} \|\tilde{a}\|_\infty \right) \int_0^t |\tilde{a}_\varepsilon(s) - a(s)| ds + \frac{\varepsilon}{2} (\alpha + \xi) \left(\alpha + \frac{5}{4}\xi + 1 \right).$$

Enfin, grâce au lemme de Gronwall,

$$|\tilde{a}_\varepsilon(t) - a(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} (\alpha + \xi) \left(\alpha + \frac{5}{4}\xi + 1 \right) e^{(\alpha + \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2})T}.$$

3.3 L'intérêt des schémas implicites

On convient en général de dire que dans les systèmes dissipatifs (c'est-à-dire ceux dans lesquels il y a une forme d'irréversibilité), on peut s'affranchir du calcul des échelles de temps les plus faibles en utilisant des schémas implicites. En d'autres termes, sous réserve d'utiliser des schémas implicites, on peut utiliser des pas de temps plus grands que le temps caractéristique le plus court du phénomène étudié.

Cela est malheureusement assez compliqué à vérifier pour les systèmes d'équations différentielles non linéaires. On considère donc à la place des systèmes 2-2 d'équations différentielles *linéaires* à coefficients constants et sans second membre, pour lesquels tous les calculs peuvent être menés de manière explicite. On écrit

$$X' = A X,$$

où la matrice A est diagonalisable: $A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$. La solution explicite de ce système est

$$\begin{aligned} X(t) &= \exp(At) X(0) \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P X(0) \\ &= \begin{pmatrix} a e^{\lambda_1 t} (P X(0))_1 + b e^{\lambda_2 t} (P X(0))_2 \\ c e^{\lambda_1 t} (P X(0))_1 + d e^{\lambda_2 t} (P X(0))_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

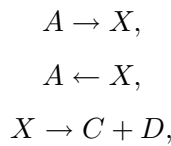
où a, b, c, d sont les coefficients de la matrice de P^{-1} .

Les schémas d'Euler explicites et implicites donnent respectivement pour $t = 1$ (et après les pas de temps $1/n, 2/n, \dots$) le résultat

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a(1 + \lambda_1/n)^n (P X(0))_1 + b(1 + \lambda_2/n)^n (P X(0))_2 \\ c(1 + \lambda_1/n)^n (P X(0))_1 + d(1 + \lambda_2/n)^n (P X(0))_2 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} a(1 - \lambda_1/n)^{-n} (P X(0))_1 + b(1 - \lambda_2/n)^{-n} (P X(0))_2 \\ c(1 - \lambda_1/n)^{-n} (P X(0))_1 + d(1 - \lambda_2/n)^{-n} (P X(0))_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On voit que lorsque $|\lambda_1/n|, |\lambda_2/n| \ll 1$, les deux schémas fonctionnent bien. Par contre lorsque $\lambda_2 < 0$ et $|\lambda_1/n| \ll 1$ mais $-\lambda_2/n$ grand devant 1 (ou de l'ordre de 1), alors le 1er ne fonctionne plus du tout (car $(1 + \lambda_2/n)^n$ devient énorme et de signe alterné) alors que le second continue de bien fonctionner (car e^{λ_2} et $(1 - \lambda_2/n)^{-n}$ sont tous deux très petits).

cette situation se présente quand on considère le système d'équations différentielles vérifié par les concentrations de A et X dans la réaction chimique



où la constante de la 1ère réaction est 1 et celle des deux autres est $1/\varepsilon$. La matrice est alors $\begin{pmatrix} -1 & 1/\varepsilon \\ 1 & -2/\varepsilon \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -1/2 + O(\varepsilon)$, $\lambda_2 = -2/\varepsilon + O(1)$.

3.4 L'approximation de la diffusion pour l'équation de transport

On considère le scaling suivant pour l'équation de transport :

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\tilde{f}_\varepsilon - f_\varepsilon), \quad (20)$$

où on a défini (pour g donnée) $\tilde{g}(t, x) = \int_{w \in S^2} g(t, x, w) \frac{dw}{|S^2|}$. On lui adjoint la donnée initiale

$$f_\varepsilon(0, x, v) = f_{in}(x, v). \quad (21)$$

On montre le théorème :

Théorème : Soit $f_{in} \in C_c^1(\mathbb{R}^3 \times S^2)$ une fonction positive, et f_ε l'unique solution (forte) positive dans $C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ de l'équation (20), (21). Alors f_ε converge vers f dans $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ faible (*), où $f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ est l'unique solution forte de l'équation de diffusion

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x) - \frac{1}{3} \Delta_x f(t, x) &= 0, \\ f(0, x) &= \int_{S^2} f_{in}(x, v) \frac{dv}{|S^2|}. \end{aligned}$$

Preuve : On multiplie l'équation (20) par f_ε et on intègre sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2$. On obtient l'estimation

$$\|\tilde{f}_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)} \leq \varepsilon \|f_{in}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{dans} \quad L^1 \cap L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2) \quad \text{faible (*)}.$$

Cela signifie que pour toute fonction $\phi \in L^p([0, T] \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$ ($p \in [1, +\infty]$),

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon \phi \longrightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f \phi.$$

En particulier, pour toute fonction ψ de v bornée, et toute fonction $\eta \in L^p([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ ($p \in [1, +\infty]$),

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{\psi f_\varepsilon} \eta \longrightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \widetilde{\psi f} \eta.$$

On en déduit que $\tilde{f} = f$, autrement dit que f ne dépend que de t et x .

On multiplie eq. (20) par 1, puis par v , et on intègre par rapport à la variable v . On obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon \partial_t \tilde{f}_\varepsilon + \nabla_x \cdot (\widetilde{v f_\varepsilon}) &= 0, \\ \varepsilon \partial_t (\widetilde{v f_\varepsilon}) + \nabla_x \cdot (\widetilde{v \otimes v f_\varepsilon}) &= -\frac{1}{\varepsilon} \widetilde{v f_\varepsilon}.\end{aligned}$$

La combinaison des deux fournit

$$\partial_t \tilde{f}_\varepsilon - \nabla_x \nabla_x : \widetilde{v \otimes v f_\varepsilon} = \varepsilon \partial_t \nabla_x \cdot (\widetilde{v f_\varepsilon}).$$

On observe alors que

$$\widetilde{v \otimes v} = \frac{1}{3} Id.$$

Le résultat final (une fois qu'on est passé à la limite au sens des distributions) est

$$\partial_t f - \frac{1}{3} \Delta_x f = 0.$$

En d'autres termes, f vérifie une équation de diffusion.

On ne peut espérer que

$$f(0, \cdot) = f_{in}$$

que si f_{in} ne dépend pas de v . Lorsque f_{in} dépend de v , il y a apparition d'une couche initiale.

Pour comprendre comment cette couche se met en place, on passe à la limite dans la formulation faible de l'équation de transport.

On sait que f_ε est également solution faible de l'équation de transport, donc pour toute fonction $\phi \in C_c^1([0, T[\times \mathbb{R}^3 \times S^2)$, on a

$$\begin{aligned}- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) \left(\varepsilon \partial_t \phi(t, x, v) + v \cdot \nabla_x \phi(t, x, v) - \frac{1}{\varepsilon} \phi(t, x, v) \right) dv dx dt \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi(0, x, v) dv dx \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v') \phi(t, x, v) \frac{dv'}{|S^2|} dv dx dt.\end{aligned}$$

En particulier, si on prend $\phi(t, x, v) = \phi_1(t, x)$, puis $\phi(t, x, v) = \phi_2(t, x) v$, on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) \partial_t \phi_1(t, x) dv dx dt - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi_1(0, x) dv dx \\
& \quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) v \cdot \nabla_x \phi_1(t, x) dv dx dt = 0, \\
& - \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) \partial_t \phi_2(t, x) v_i dv dx dt - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi_2(0, x) v_i dv dx \\
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) v \cdot \nabla_x \phi_2(t, x) v_i dv dx dt = - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) \phi_2(t, x) v_i dv dx dt.
\end{aligned}$$

Si l'on se limite à des fonctions $\phi_1 \in C_c^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$, et qu'on considère $\phi_{2j} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}$, on obtient la formule

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) \partial_t \phi_1(t, x) dv dx dt - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi_1(0, x) dv dx \\
& - \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) v \cdot \partial_t \nabla_x \phi_1(t, x) dv dx dt - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) v \cdot \nabla_x \phi_1(0, x) dv dx \\
& \quad - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_\varepsilon(t, x, v) v \otimes v : \nabla_x \nabla_x \phi_1(t, x) dv dx dt = 0.
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(t, x) \partial_t \phi_1(t, x) dv dx dt - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f_{in}(x, v) \phi_1(0, x) dv dx \\
& \quad - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(t, x) v \otimes v : \nabla_x \nabla_x \phi_1(t, x) dv dx dt = 0.
\end{aligned}$$

En éliminant la variable v , on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x) \partial_t \phi_1(t, x) dx dt - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{S^2} f_{in}(x, v) \frac{dv}{|S^2|} \right) \phi_1(0, x) dx \\
& \quad - \frac{1}{3} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x) \Delta_x \phi_1(t, x) dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Ceci n'est autre que la formulation faible de l'équation de diffusion :

$$\partial_t f(t, x) - \frac{1}{3} \Delta_x f(t, x) = 0,$$

$$f(0, x) = \int_{S^2} f_{in}(x, v) \frac{dv}{|S^2|}.$$

Les résultats de régularité pour les équations paraboliques montrent que f est de classe $C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ (mais pas $C_c^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$) et donc que f est l'unique solution forte de l'équation de diffusion. Cette unicité montre que c'est la famille f_ε tout-entière qui converge vers f .

4 L'équation de Boltzmann

4.1 Description des hypothèses physiques, équation obtenue

L'équation de Boltzmann décrit des gaz neutres rarefiés. On estime que dans ce cas, le phénomène prédominant est alors celui des collisions.

On considère toujours comme fonction inconnue la densité $f(t, x, v) \geq 0$ de particules qui au temps t et au point x possèdent la vitesse v .

En l'absence d'interactions entre les particules, la particule qui est au temps t au point x et qui a la vitesse v sera au temps $t + \tau$ au point $x + v\tau$ et aura encore la vitesse v . On écrit donc

$$f(t + \tau, x + v\tau, v) = f(t, x, v).$$

Cela peut encore s'énoncer sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Lorsque l'on prend en compte les collisions, on s'attend à avoir une équation du type

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f),$$

où $Q(f)$ décrit la variation infinitésimale de f due aux collisions. On fait l'hypothèse que les collisions sont instantanées et complètement localisées. Cela signifie du point de vue mathématique que Q agit uniquement sur la variable v . On suppose également que les collisions binaires sont prépondérantes. On ne prend donc qu'elles en compte. Cela signifie que le noyau Q sera quadratique. Enfin, on ne considèrera que des gaz monoatomiques, dans lesquels l'énergie cinétique est conservée au cours d'une collision.

On s'intéresse maintenant à la géométrie d'une collision. On note v' et v'_* les vitesses des particules p et p_* avant la collision, v et v_* leurs vitesses après la collision. En vertu de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, on a

$$v + v_* = v' + v'_*,$$

$$|v| + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2.$$

On remarque qu'en particulier

$$|v - v_*| = |v' - v'_*|.$$

Cette dernière équation exprime le fait qu'il y a conservation de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse des deux particules. Elle suggère divers paramétrages possibles de v' et v'_* en fonction de v et v_* .

On peut par exemple écrire

$$v' - v'_* = |v - v_*|\sigma,$$

où $\sigma \in S^2$. On obtient alors les équations

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\sigma,$$

$$v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\sigma.$$

Ce paramétrage peut se révéler très intéressant, mais il a le désavantage de ne pas être linéaire en v, v_* .

On introduit donc le paramétrage suivant :

$$v' - v'_* = v - v_* - 2(\omega \cdot (v - v_*))\omega,$$

où $\omega \in S^2/\{\pm 1\}$.

Il exprime le fait que $v' - v'_*$ se déduit de $v - v_*$ par une symétrie orthogonale de plan invariant ω^\perp .

Les équations qui s'en déduisent sont

$$v' = v - (\omega \cdot (v - v_*))\omega,$$

$$v'_* = v_* + (\omega \cdot (v - v_*))\omega.$$

On note $p(v, v_*, v', v'_*)$ le taux de collision de particules ayant les vitesses initiales v' et v'_* et qui obtiennent après collision des vitesses v, v_* .

Il est clair que l'on peut réécrire

$$p(v, v_*, v', v'_*) = q(v, v_*, \omega).$$

De plus, l'invariance galiléenne montre qu'en fait

$$q(v, v_*, \omega) = q\left(|v - v_*|, \left|\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega\right|\right).$$

Le noyau de collision s'écrit alors

$$Q(f)(v) = Q^+(f)(v) - Q^-(f)(v),$$

où

$$Q^+(f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{v' \in \mathbb{R}^3} \int_{v'_* \in \mathbb{R}^3} f(v') f(v'_*) p(v, v_*, v', v'_*) dv' dv'_* dv_*,$$

$$Q^-(f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{v' \in \mathbb{R}^3} \int_{v'_* \in \mathbb{R}^3} f(v) f(v_*) p(v', v'_*, v, v_*) dv' dv'_* dv_*.$$

On utilise enfin la microréversibilité

$$p(v, v_*, v', v'_*) = p(v', v'_*, v, v_*),$$

pour conclure que

$$Q(f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\omega \in S^2} \{f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*)\} q \left(|v - v_*|, \left| \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \omega \right| \right) d\omega dv_*.$$

On appelle équation de Boltzmann de section efficace q l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f),$$

où Q est défini précédemment.

4.2 Les différentes sections efficaces de collisions

La fonction q définie au chapitre précédent peut être calculée de manière heuristique et dépend du potentiel d'interaction V entre les particules du gaz considéré. Ces calculs sont (presque) explicites lorsque la forme de V est très simple. Par exemple lorsque

$$V(r) = \frac{k}{r^{s-1}}.$$

On obtient alors que

$$q(w, u) = |w|^{\frac{s-5}{s-1}} b(u),$$

où $b \in L_{loc}^\infty([0, 1])$, et

$$b(u) \sim (1 - u)^{-\frac{s+1}{s-1}}.$$

On distingue traditionnellement les potentiels où

- $s > 5$, on parle alors de potentiels durs,
- $s = 5$, cas particulier des molécules Maxwelliennes,
- $2 < s < 5$, cas des potentiels mous.

Le cas où $s = 2$ est celui de l'interaction Coulombienne, et pose des problèmes très particuliers que nous n'aborderons pas. On remarque que comme $\frac{s+1}{s-1} \in]1, 3[$ pour $s \in]2, +\infty[$, la section efficace angulaire b n'est jamais intégrable. Cela conduit à des difficultés mathématiques considérables, et il est d'usage de faire l'hypothèse du cutoff angulaire faible de Grad, à savoir: $b \in L^1([0, 1[)$. Cela revient, du point de vue physique, à ne pas tenir compte des collisions "rasantes", celles pour lesquelles les vitesses des particules ne changent que très peu au cours d'une collision.

4.3 Quantités conservées, décroissance de l'entropie

Théorème : On suppose que $q \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2)$, et que

$$\forall v, v_* \in \mathbb{R}^3, \omega \in S^2 \quad q(v, v_*, \omega) = q(v', v'_*, \omega) = q(v_*, v, \omega).$$

Alors pour $f \in L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|^2)dv)$, $(1 + |v|^2)^{-1}\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(v) \varphi(v) dv &= \frac{1}{4} \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\omega \in S^2} \\ &\{f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)\} \{\varphi(v) + \varphi(v_*) - \varphi(v') - \varphi(v'_*)\} \\ &\times q(v, v_*, \omega) d\omega dv_* dv. \end{aligned}$$

Corollaire : Sous les mêmes hypothèses sur q, f , on en déduit que

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

De plus, si $f > 0$ p.p. et si $(1 + |v|^2)^{-1} \log f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} - \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(v) \log f(v) dv &= \frac{1}{4} \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\omega \in S^2} \\ &\{f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)\} \{\log(f(v')f(v'_*)) - \log(f(v)f(v_*))\} \\ &\times q(v, v_*, \omega) d\omega dv_* dv \geq 0. \end{aligned}$$

La première formule exprime la conservation, au cours du mécanisme de collision, de la masse, de l'impulsion et de l'énergie (cinétique).

La seconde formule constitue la première partie du théorème H de Boltzmann, elle exprime le fait que la dissipation d'entropie est négative.

Corollaire : Soit $f \in C^1([0, \infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3))$ une solution de l'équation de Boltzmann, où q vérifie les hypothèses des propositions précédentes. Alors

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad & \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{v \in \mathbb{R}^3} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv dx \\ & = \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{v \in \mathbb{R}^3} f(0, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv dx. \end{aligned}$$

Si de plus $f > 0$ p.p. et $(1 + |v|^2)^{-1} \log f \in C^1([0, \infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3))$ alors

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad & \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{v \in \mathbb{R}^3} f(t, x, v) \log f(t, x, v) dv dx \\ & \leq \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{v \in \mathbb{R}^3} f(0, x, v) \log f(0, x, v) dx dv. \end{aligned}$$

4.4 Théorème H de Boltzmann

Théorème : On suppose que q vérifie les hypothèses du théorème précédent et que de plus, $q > 0$ p.p., $f \in L^1(\mathbb{R}^3, (1 + |v|^2)dv)$, $f > 0$ p.p. et $(1 + |v|^2)^{-1} \log f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Alors il y a équivalence entre les affirmations suivantes :

i)

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \quad Q(f)(v) = 0,$$

ii)

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(v) \log f(v) dv = 0,$$

iii) $\exists \rho, T > 0, u \in \mathbb{R}^3$, tels que

$$f(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}}.$$

Preuve : Il faut montrer que ii) \Rightarrow iii). On note $g = \log f$, on sait alors que $(1 + |v|^2)^{-1} g \in L^\infty(\mathbb{R}_v^3)$.

De plus, iii) implique que, p.p. en $v, v_* \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in S^2$,

$$g(v + (\omega \cdot (v_* - v))\omega) + g(v_* - (\omega \cdot (v_* - v))\omega) = g(v) + g(v_*).$$

Quitte à intégrer cette équation par rapport à la variable ω , on obtient $T \in L_{loc}^\infty : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$g(v) + g(v_*) = T(v + v_*, v^2 + v_*^2).$$

on introduit alors, en posant

$$v = (x_1, x_2, x_3), \quad v_* = (y_1, y_2, y_3),$$

l'opérateur

$$D = (y_2 - x_2) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial y_1} \right\} - (y_1 - x_1) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right\}.$$

On vérifie facilement que $DT = 0$.

Donc, au sens des distributions,

$$(y_2 - x_2) \frac{\partial g}{\partial 1}(v) - (y_1 - x_1) \frac{\partial g}{\partial 2}(v) - (y_2 - x_2) \frac{\partial g}{\partial 1}(v_*) + (y_1 - x_1) \frac{\partial g}{\partial 2}(v_*) = 0.$$

En dérivant par rapport à x_2 puis y_2 , on obtient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial 1 \partial 2}(v) + \frac{\partial^2 g}{\partial 1 \partial 2}(v_*) = 0$$

De même, en dérivant par rapport à x_1 et y_2 , on obtient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial 1^2}(v) - \frac{\partial^2 g}{\partial 2^2}(v_*) = 0.$$

On vérifie alors facilement que $\exists a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \quad g(v) = a + b \cdot v + c|v|^2.$$

On conclut en prenant l'exponentielle de g .

4.5 Quelques conditions aux limites typiques

Il est en fait rare que l'on résolve l'équation de Boltzmann pour $x \in \mathbb{R}^3$ tout entier. Le plus souvent, on dispose d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ connexe borné que l'on suppose de plus ouvert régulier, dans lequel le gaz vérifie l'équation de Boltzmann. (On notera $n(x)$ la normale extérieure en x à Ω).

Comme pour les équations de transport, il y a deux types principaux de conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω .

Dans le premier type, $\partial\Omega$ est une frontière artificielle, il y a en fait du gaz qui entre dans le domaine de calcul. Il faut alors se donner la fonction f pour les points de $\partial\Omega$ et pour les vitesses qui permettent de rentrer dans Ω . Autrement dit, la condition aux limites s'écrira

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \text{ tel que } v \cdot n(x) \leq 0, \quad f(t, x, v) = g(t, x, v).$$

Dans le second type, $\partial\Omega$ est une frontière naturelle, dont on sait par exemple que la température est une fonction $T(t, x)$. Une proportion α des particules va alors se refléter sur la paroi conformément aux lois de Descartes, et une proportion $1 - \alpha$ va être thermalisée à la paroi, puis réémise isotropiquement. On écrit alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega, \forall v \text{ tel que } v \cdot n(x) \leq 0, \quad f(t, x, v) = & \alpha f(t, x, v - 2(v \cdot n(x))n(x)) \\ & + (1 - \alpha) \int_{w \in \mathbb{R}^3} f(t, x, w) dw (v \cdot n(x)) \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2T}}}{(2\pi T)^{3/2}}. \end{aligned}$$

4.6 Le développement de Hilbert et les équations d'Euler compressibles

On se place dans une situation "très collisionnelle" et on écrit le développement de Hilbert :

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon).$$

On impose de plus une condition initiale

$$f_\varepsilon(0, x, v) = f_{in}(x, v).$$

On multiplie l'équation par $\log f_\varepsilon$ et on intègre sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(T, x, v) \log f_\varepsilon(T, x, v) dv dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} -Q(f_\varepsilon)(t, x, v) \log f_\varepsilon(t, x, v) dv dx dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(0, x, v) \log f_\varepsilon(0, x, v) dv dx.$$

On en déduit

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} -Q(f_\varepsilon)(t, x, v) \log f_\varepsilon(t, x, v) dv dx dt = O(\varepsilon),$$

et, si l'on peut vraiment passer à la limite $f_\varepsilon \rightarrow f$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} -Q(f)(t, x, v) \log f(t, x, v) dv dx dt = 0,$$

et donc

$$f(t, x, v) = \frac{\rho(t, x)}{(2\pi T(t, x))^{3/2}} e^{-\frac{|v-u(t,x)|^2}{2T(t,x)}} := M_{\rho(t,x),u(t,x),T(t,x)}.$$

Comme

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = 0,$$

on en déduit que

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} v dv = 0.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} v dv = 0.$$

Le calcul donne

$$\int_{\mathbb{R}^3} M_{\rho,u,T} \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho |u|^2 + 3\rho T \end{pmatrix},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} M_{\rho,u,T} \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2 \end{pmatrix} v_j dv = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + \rho T \delta_{ij} \\ \rho |u|^2 u_j + 5\rho T u_j \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on obtient le système d'Euler des gaz compressibles :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u_i) + \nabla_x \cdot (\rho u u_i) + \partial_{x_i} p &= 0, \\ \partial_t (\rho \frac{|u|^2}{2} + e) + \nabla_x \cdot (\rho \frac{|u|^2}{2} u + (p + e) u) &= 0,\end{aligned}$$

avec la loi d'état des gaz parfaits ($p = \rho T$) qui sont monoatomiques ($e = \frac{3}{2} \rho T$).

On considère maintenant la relation d'entropie :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, x, v) \log f_\varepsilon(t, x, v) dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(t, x, v) \log f_\varepsilon(t, x, v) v dv \leq 0.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \log f(t, x, v) dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) \log f(t, x, v) v dv \leq 0.$$

Ceci (en tenant compte de la conservation de la masse) donne la relation d'entropie :

$$\partial_t (\rho \log(\frac{\rho}{T^{3/2}})) + \nabla_x \cdot (\rho u \log(\frac{\rho}{T^{3/2}})) \leq 0.$$

On peut remarquer que le système obtenu est indépendant de la section efficace B apparaissant dans l'équation de Boltzmann (pourvu qu'elle soit strictement positive).

Les équations d'Euler compressibles, lorsque toutes les quantités sont régulières, peuvent être réécrites sous la forme non-conservative :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + u \cdot \nabla_x \rho + \rho \nabla_x \cdot u &= 0, \\ \partial_t u_i + u \cdot \nabla_x u_i + \nabla_x T + T \frac{\nabla_x \rho}{\rho} u &= 0.\end{aligned}$$

L'équation d'énergie s'obtient à partir de formules plus compliquées :

$$\begin{aligned}|u|^2 \partial_t \rho + 2\rho u \partial_t u + 3T \partial_t \rho + 3\rho \partial_t T + 2\rho |u|^2 \nabla_x \cdot u \\ + |u|^2 u \cdot \nabla_x \rho + 2\rho \nabla_x u : u \otimes u \\ + 5\rho T \nabla_x \cdot u + 5\rho u \nabla_x T + 5T u \nabla_x \rho &= 0.\end{aligned}$$

Après simplification,

$$\partial_t T + u \cdot \nabla_x T + \frac{2}{3} T \nabla_x \cdot u = 0.$$

5 Le développement de Chapman-Enskog et les équations de Navier-Stokes compressibles

5.1 Mise en place du développement

On reprend le développement de Hilbert et on essaye maintenant d'obtenir le début du développement asymptotique de f_ε . On a donc

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon),$$

avec la condition initiale

$$f_\varepsilon(0, x, v) = f_{in}(x, v).$$

On sait que $f_\varepsilon \rightarrow f$ où f est une Maxwellienne dont les paramètres vérifient l'équation d'Euler des fluides compressibles. On est donc tenté de chercher un développement de la forme $f_\varepsilon = f + \varepsilon g + O(\varepsilon^2)$. Mais cela mène à des calculs peu agréables.

En fait, il est plus astucieux d'écrire $f_\varepsilon = M_\varepsilon (1 + \varepsilon s_\varepsilon + O(\varepsilon^2))$, où M_ε est une Maxwellienne :

$$M_\varepsilon(t, x, v) = \frac{\rho_\varepsilon(t, x)}{(2\pi T_\varepsilon(t, x))^{3/2}} e^{-\frac{|v - u_\varepsilon(t, x)|^2}{T_\varepsilon(t, x)}},$$

dont les paramètres $\rho_\varepsilon(t, x)$, $u_\varepsilon(t, x)$, $T_\varepsilon(t, x)$ sont des solutions à l'ordre 1 des équations d'Euler compressibles :

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = O(\varepsilon),$$

$$\partial_t (\rho_\varepsilon u_{i\varepsilon}) + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon u_{i\varepsilon}) + \partial_{x_i} (\rho_\varepsilon T_\varepsilon) = O(\varepsilon),$$

$$\partial_t \left(\rho_\varepsilon \frac{|u_\varepsilon|^2}{2} + \frac{3}{2} \rho_\varepsilon T_\varepsilon \right) + \nabla_x \cdot \left(\rho_\varepsilon \frac{|u_\varepsilon|^2}{2} u_\varepsilon + \frac{5}{2} \rho_\varepsilon u_\varepsilon T_\varepsilon \right) = O(\varepsilon).$$

Néanmoins, plutôt que d'imposer une telle forme a priori et de vérifier si elle est compatible avec le développement de Hilbert, on va montrer que cette forme est une conséquence du développement lui-même. On raisonnera uniquement au niveau *formel*.

On commence par observer (comme dans le chapitre précédent) que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} -Q(f_\varepsilon)(t, x, v) \log f_\varepsilon(t, x, v) dv dx dt = O(\varepsilon).$$

Mais, au lieu de passer à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit la distance typique de f_ε à l'ensemble des Maxwelliennes. En effet, on voit que

$$\left(f_\varepsilon(v') f_\varepsilon(v'_*) - f_\varepsilon(v) f_\varepsilon(v_*) \right) \left(\log(f_\varepsilon(v') f_\varepsilon(v'_*)) - \log(f_\varepsilon(v) f_\varepsilon(v_*)) \right) = O(\varepsilon),$$

puis que

$$f_\varepsilon(v') f_\varepsilon(v'_*) - f_\varepsilon(v) f_\varepsilon(v_*) = O(\varepsilon^{1/2}),$$

et donc (il faut en fait supposer que f_ε reste bornée inférieurement en un certain sens)

$$\log f_\varepsilon(v') + \log f_\varepsilon(v'_*) = \log f_\varepsilon(v) + \log f_\varepsilon(v_*) + O(\varepsilon^{1/2}),$$

ce qui fournit, une fois qu'on a appliqué les opérateurs différentiels de la section précédente (pour $i \neq j$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \log f_\varepsilon(v) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \log f_\varepsilon(v_*) &= O(\varepsilon^{1/2}), \\ \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \log f_\varepsilon(v) - \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \log f_\varepsilon(v_*) &= O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

On en déduit (en prenant n'importe quelle valeur particulière de v_*) que

$$\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \log f_\varepsilon(v) = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \log f_\varepsilon(v) = c_\varepsilon + O(\varepsilon^{1/2}),$$

puis après intégrations :

$$\log f_\varepsilon(v) = a_\varepsilon + b_\varepsilon \cdot v + c_\varepsilon |v|^2/2 + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Finalement, en prenant l'exponentielle de l'expression précédente, pour une certaine Maxwellienne M_ε ,

$$f_\varepsilon(v) = M_\varepsilon(v) (1 + O(\varepsilon^{1/2})).$$

On obtient donc

$$f_\varepsilon(v) = M_\varepsilon(v) (1 + \varepsilon^{1/2} r_\varepsilon),$$

où $r_\varepsilon = O(1)$.

Après réintroduction de cette formule dans le développement de Hilbert, il vient

$$2Q(M_\varepsilon, M_\varepsilon r_\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2}),$$

où $Q(f, g)$ est la forme polaire associée à l'opérateur quadratique $Q(f)$, c'est-à-dire

$$2Q(f, g)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \left(f(v') g(v'_*) + f(v'_*) g(v') - f(v) g(v_*) - f(v_*) g(v) \right) B d\sigma dv_*.$$

On étudie maintenant $Q(f, g)$ lorsque $f = M$ une Maxwellienne, et $g = M r$ (où r est une fonction quelconque). On a

$$2Q(M, M r)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} M(v) M(v_*) \left(r(v') + r(v'_*) - r(v) - r(v_*) \right) B d\sigma dv_*.$$

Donc pour ϕ fonction test,

$$\begin{aligned} 2 \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(M, M r)(v) \phi(v) dv &= -\frac{1}{4} \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} M(v) M(v_*) \\ &\quad \times \left(r(v') + r(v'_*) - r(v) - r(v_*) \right) \\ &\quad \times \left(\phi(v') + \phi(v'_*) - \phi(v) - \phi(v_*) \right) B d\sigma dv_* dv. \end{aligned}$$

En particulier

$$2 \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(M, M r)(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} 2 \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(M, M r)(v) r(v) dv &= -\frac{1}{4} \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} M(v) M(v_*) \\ &\quad \times \left(r(v') + r(v'_*) - r(v) - r(v_*) \right)^2 B d\sigma dv_* dv. \end{aligned}$$

Donc si $Q(M, M r)(v) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\forall v, v_*, \sigma, \quad r(v') + r(v'_*) = r(v) + r(v_*).$$

On en déduit comme dans le chapitre précédent (par l'application des opérateurs différentiels que l'on a déjà vus) que

$$r(v) = a + b \cdot v + c |v|^2/2.$$

De même, si

$$2Q(M, Mr)(v) = l(v),$$

alors on a forcément $\int l(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0$. De plus,

$$2 \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(M, Mr)(v) r(v) dv = \int_{v \in \mathbb{R}^3} l(v) r(v) dv,$$

donc (pour tout a, b, c)

$$2 \int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(M, Mr)(v) r(v) dv = \int_{v \in \mathbb{R}^3} l(v) \left(r(v) - (a + b \cdot v + c|v|^2/2) \right) dv$$

d'où (formellement)

$$\left(r(v') + r(v'_*) - r(v) - r(v_*) \right)^2 \leq O(\|l\|) \inf_{a,b,c} \|r(v) - (a + b \cdot v + c|v|^2/2)\|.$$

Après application des opérateurs différentiels habituels, il vient

$$\inf_{a,b,c} \left(r(v) - (a + b \cdot v + c|v|^2/2) \right)^2 \leq O(\|l\|) \inf_{a,b,c} \left(r(v) - (a + b \cdot v + c|v|^2/2) \right),$$

donc si $l_\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2})$, alors on peut trouver $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ tels que $r_\varepsilon(v) - a_\varepsilon + b_\varepsilon \cdot v + c_\varepsilon |v|^2/2 = O(\varepsilon^{1/2})$ (sous réserve que $M_\varepsilon = O(1)$). Si de plus $r_\varepsilon = O(1)$, alors $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ sont également $O(1)$.

Revenant à notre problème initial, on peut écrire

$$f_\varepsilon(v) = M_\varepsilon(v) \left(1 + \varepsilon^{1/2} (a_\varepsilon + b_\varepsilon \cdot v + c_\varepsilon |v|^2/2) + \varepsilon n_\varepsilon(v) \right),$$

avec $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon, n_\varepsilon = O(1)$.

On utilise maintenant la remarque suivante : si $M_\varepsilon = O(1)$, on peut écrire $M_\varepsilon(v) = \exp(A_\varepsilon + B_\varepsilon \cdot v + C_\varepsilon |v|^2/2)$, avec $A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon = O(1)$. Mais alors

$$\begin{aligned} & \exp(A_\varepsilon + B_\varepsilon \cdot v + C_\varepsilon |v|^2/2 + \varepsilon^{1/2} (a_\varepsilon + b_\varepsilon \cdot v + c_\varepsilon |v|^2/2)) \\ &= (1 + \varepsilon^{1/2} (a_\varepsilon + b_\varepsilon \cdot v + c_\varepsilon |v|^2/2) + O(\varepsilon)) M_\varepsilon(v). \end{aligned}$$

On peut donc trouver une Maxwellienne M'_ε telle que $M'_\varepsilon = O(1)$, et

$$f_\varepsilon(v) = M'_\varepsilon(v) (1 + \varepsilon n'_\varepsilon(v)),$$

avec $n'_\varepsilon = O(1)$. On souhaite maintenant imposer à n'_ε certaines propriétés d'orthogonalité. Pour cela, on écrit $M'_\varepsilon(v) = \exp(A'_\varepsilon + B'_\varepsilon \cdot v + C'_\varepsilon |v|^2/2)$, avec $A'_\varepsilon, B'_\varepsilon, C'_\varepsilon = O(1)$. On introduit alors (pour $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ et $\gamma_\varepsilon = O(1)$ que l'on choisira plus tard) :

$$\begin{aligned} M''_\varepsilon(v) &= \exp((A'_\varepsilon + B'_\varepsilon \cdot v + C'_\varepsilon |v|^2/2) + \varepsilon (\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \cdot v + \gamma_\varepsilon |v|^2/2)) \\ &= (1 + \varepsilon (\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \cdot v + \gamma_\varepsilon |v|^2/2) + O(\varepsilon^2)) M'_\varepsilon(v). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(v) &= M''_\varepsilon(v) (1 - \varepsilon (\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \cdot v + \gamma_\varepsilon |v|^2/2) + O(\varepsilon^2)) (1 + \varepsilon n'_\varepsilon(v)), \\ &= M''_\varepsilon(v) (1 + \varepsilon (n''_\varepsilon(v) - \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon \cdot v - \gamma_\varepsilon |v|^2/2)), \end{aligned}$$

avec $M''_\varepsilon = O(1)$, et $n''_\varepsilon = n'_\varepsilon + O(\varepsilon) = O(1)$. On cherche alors $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon = O(1)$ de telle sorte que

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} M''_\varepsilon(v) (n''_\varepsilon(v) - \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon \cdot v - \gamma_\varepsilon |v|^2/2) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0. \quad (22)$$

On note

$$M''_\varepsilon(v) = \frac{\rho_\varepsilon}{(2\pi T_\varepsilon)^{3/2}} e^{-\frac{|v-u_\varepsilon|^2}{T_\varepsilon}},$$

avec $\rho_\varepsilon, u_\varepsilon$ et $T_\varepsilon = O(1)$. Le système (22) peut se réécrire

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} M''_\varepsilon(v) (n''_\varepsilon(v) - \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon \cdot v - \gamma_\varepsilon |v|^2/2) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_i - u_{i\varepsilon}}{\sqrt{T_\varepsilon}} \\ \frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} \end{pmatrix} dv = 0. \quad (23)$$

Après changement de variable $w = \frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}$, cela fournit

$$\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|w|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(n''_\varepsilon(w \sqrt{T_\varepsilon} + u_\varepsilon) - \alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon \cdot (w \sqrt{T_\varepsilon} + u_\varepsilon) \right. \quad (24)$$

$$\left. - \gamma_\varepsilon |w \sqrt{T_\varepsilon} + u_\varepsilon|^2/2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ w_i \\ |w|^2/2 \end{pmatrix} dw = 0,$$

d'où

$$\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|w|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(n_\varepsilon''(w \sqrt{T_\varepsilon} + u_\varepsilon) - (\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon \cdot u_\varepsilon + \gamma_\varepsilon |u_\varepsilon|^2/2) \right. \quad (25)$$

$$\left. - (\beta_\varepsilon \sqrt{T_\varepsilon} + 2\gamma_\varepsilon u_\varepsilon \sqrt{T_\varepsilon}) \cdot w - \gamma_\varepsilon T_\varepsilon |w|^2/2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ w_i \\ |w|^2/2 \end{pmatrix} dw = 0.$$

On remarque alors que

$$\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|w|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} dw = 1,$$

$$\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|w|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} |w|^2 dw = 3,$$

$$\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|w|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} |w|^4 dw = 15.$$

Pour vérifier que le système (25) admet une solution qui convient, on doit calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{\varepsilon 1} & u_{\varepsilon 2} & u_{\varepsilon 3} & \frac{|u_\varepsilon|^2}{2} + \frac{3}{2} T_\varepsilon \\ 0 & \sqrt{T_\varepsilon} & 0 & 0 & 2 u_{\varepsilon 1} \sqrt{T_\varepsilon} \\ 0 & 0 & \sqrt{T_\varepsilon} & 0 & 2 u_{\varepsilon 2} \sqrt{T_\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{T_\varepsilon} & 2 u_{\varepsilon 3} \sqrt{T_\varepsilon} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} u_{\varepsilon 1} & \frac{3}{2} u_{\varepsilon 2} & \frac{3}{2} u_{\varepsilon 3} & \frac{3}{4} |u_\varepsilon|^2 + \frac{15}{4} T_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Or ce déterminant vaut $\frac{3}{2} T_\varepsilon^{5/2}$, donc on obtient une solution au système (25) (pour laquelle on a bien $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ et $\gamma_\varepsilon = O(1)$).

Pour finir, on renomme $M_\varepsilon(v) := M_\varepsilon''(v)$. On obtient ce qui est souvent considéré comme la forme de départ du développement de Chapman-Enskog :

$$f_\varepsilon(v) = M_\varepsilon(v) (1 + \varepsilon s_\varepsilon(v)), \quad (26)$$

avec $M_\varepsilon(v) = O(1)$, $s_\varepsilon = O(1)$ et

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} M_\varepsilon(v) s_\varepsilon(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

Avec ce nouveau développement, on obtient une Maxwellienne

$$M_\varepsilon(t, x, v) = \frac{\rho_\varepsilon(t, x)}{(2\pi T_\varepsilon(t, x))^{3/2}} e^{-\frac{|v-u_\varepsilon(t, x)|^2}{T_\varepsilon(t, x)}},$$

dont les paramètres $\rho_\varepsilon(t, x)$, $u_\varepsilon(t, x)$, $T_\varepsilon(t, x)$ sont $O(1)$. De plus en intégrant le développement de Hilbert contre 1, v_i et $|v|^2/2$, on obtient les équations d'Euler compressibles à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) &= O(\varepsilon), \\ \partial_t (\rho_\varepsilon u_{i\varepsilon}) + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon u_{i\varepsilon}) + \partial_{x_i} (\rho_\varepsilon T_\varepsilon) &= O(\varepsilon), \\ \partial_t (\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 + \frac{3}{2} \rho_\varepsilon T_\varepsilon) + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon + \frac{5}{2} \rho_\varepsilon u_\varepsilon T_\varepsilon) &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Il convient de réécrire ces équations sous forme non-conservative (et avec des notations tensorielles) :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla_x \rho_\varepsilon + \rho_\varepsilon \nabla_x \cdot u_\varepsilon &= O(\varepsilon), \\ \partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon + \nabla_x T_\varepsilon + T_\varepsilon \frac{\nabla_x \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} &= O(\varepsilon), \\ \partial_t T_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla_x T_\varepsilon + \frac{2}{3} T_\varepsilon \nabla_x \cdot u_\varepsilon &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

En introduisant le développement (26) dans le développement de Hilbert, on observe ensuite que

$$\partial_t M_\varepsilon + v \cdot \nabla_x M_\varepsilon = 2Q(M_\varepsilon, M_\varepsilon s_\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Le calcul fournit

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t M_\varepsilon + v \cdot \nabla_x M_\varepsilon}{M_\varepsilon} &= \frac{\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla_x \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \\ -\frac{3}{2} \frac{\partial_t T_\varepsilon + v \cdot \nabla_x T_\varepsilon}{T_\varepsilon} + \frac{\partial_t u_\varepsilon + v \cdot \nabla_x u_\varepsilon}{T_\varepsilon} \cdot (v - u_\varepsilon) + \frac{\partial_t T_\varepsilon + v \cdot \nabla_x T_\varepsilon}{T_\varepsilon} \frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} \\ &= \frac{\partial_t \rho_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla_x \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} + (v - u_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla_x \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} \\ + \left(\frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial_t T_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla_x T_\varepsilon}{T_\varepsilon} + \left(\frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} - \frac{3}{2} \right) (v - u_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{T_\varepsilon} \\ + (\partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon) \cdot \frac{v - u_\varepsilon}{T_\varepsilon} + \nabla_x u_\varepsilon : \frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \otimes \frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla_x \cdot u_\varepsilon + O(\varepsilon) + (v - u_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla_x \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} + \left(\frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} - \frac{3}{2} \right) \left(-\frac{2}{3} \nabla_x \cdot u_\varepsilon + O(\varepsilon) \right) \\
&+ \left(\frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} - \frac{3}{2} \right) (v - u_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{T_\varepsilon} + \left(-\nabla_x T_\varepsilon - T_\varepsilon \frac{\nabla_x \rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} + O(\varepsilon) \right) \cdot \frac{v - u_\varepsilon}{T_\varepsilon} \\
&\quad + \nabla_x u_\varepsilon : \frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \otimes \frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \\
&= \left(\frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \otimes \frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} - \frac{1}{3} \frac{|v - u_\varepsilon|^2}{T_\varepsilon} \right) : \nabla_x u_\varepsilon \\
&+ \left(\frac{|v - u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon} - \frac{5}{2} \right) (v - u_\varepsilon) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{T_\varepsilon} + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Finalement, si on pose

$$A_i(V) = \left\{ \frac{|V|^2}{2} - \frac{5}{2} \right\} V_i, \quad B_{ij} = \left\{ V_i V_j - \frac{1}{3} |V|^2 \delta_{ij} \right\},$$

on obtient

$$\partial_t M_\varepsilon + v \cdot \nabla_x M_\varepsilon = M_\varepsilon \left(B \left(\frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) : \nabla_x u_\varepsilon + A \left(\frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) + O(\varepsilon).$$

On est donc amené à résoudre l'équation intégrale approchée :

$$2Q(M_\varepsilon, M_\varepsilon s_\varepsilon) = M_\varepsilon \left(B \left(\frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) : \nabla_x u_\varepsilon + A \left(\frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) + O(\varepsilon),$$

sous la contrainte

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} M_\varepsilon(v) s_\varepsilon(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

On peut également vérifier par le calcul que A_i et B_{ij} vérifient les propriétés d'orthogonalité (pour $M(v) = \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}}$)

$$\int_{\mathbb{R}^3} M(v) A_i(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} M(v) B_{ij}(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

A partir d'ici, on ne s'intéresse plus qu'au cas particulier dans lequel la section efficace B dans le noyau de Boltzmann est **Constante** : on prend

donc $B = 1$ (Attention aux notations : ce B n'a rien à voir avec le tenseur B_{ij}).

On commence par résoudre l'équation $2Q(M, M s) = M A_i$, où $M(v) = \frac{e^{-|v|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}}$ est la Maxwellienne normalisée. On calcule (en se souvenant que $2M^{-1}Q(M, M \cdot)$ contient $1, v_i, |v|^2/2$ dans son noyau)

$$\begin{aligned}
4M^{-1}Q(M, M A)(v) &= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\left| \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right|^2 \left(\frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right) \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right|^2 \left(\frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right) - |v|^2 v - |v_*|^2 v_* \right) d\sigma dv_* \\
&= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left((|v|^2 + |v_*|^2) \frac{v+v_*}{2} + \left(\left| \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right|^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left| \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right|^2 \right) \frac{|v-v_*|}{2} \sigma - |v|^2 v - |v_*|^2 v_* \right) d\sigma dv_* \\
&= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(|v|^2 \frac{v}{2} + |v_*|^2 \frac{v}{2} + \frac{|v-v_*|^2}{2} (v+v_*) \cdot \sigma \sigma - |v|^2 v \right) d\sigma dv_*.
\end{aligned}$$

Or pour $|x| = 1$, on a $\int_{\sigma \in S^2} (x \cdot \sigma) \sigma d\sigma = \frac{x}{3}$. Donc,

$$\begin{aligned}
4M^{-1}Q(M, M A)(v) &= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(-|v|^2 v/2 + |v_*|^2 v/2 + \frac{|v-v_*|^2}{2} \frac{v+v_*}{3} \right) dv_* \\
&= -|v|^2 v/2 + 3v/2 + \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{|v|^2}{2} v/3 + \frac{|v_*|^2}{2} v/3 - (v \cdot v_*) v/3 - (v \cdot v_*) v_*/3 \right) dv_* \\
&= -|v|^2 v/2 + 3v/2 + |v|^2 v/6 + 3v/6 - \frac{1}{3} \sum_j v_j \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} v_{*j} v_* dv_* \\
&= -\frac{1}{3} (|v|^2 - 5) v = -\frac{2}{3} A(v).
\end{aligned}$$

Ensuite on résout l'équation $2Q(M, M s) = M B_{ij}$. On calcule

$$\begin{aligned}
2M^{-1}Q(M, M B_{ij}) &= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\left(\frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right)_i \left(\frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right)_j \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right)_i \left(\frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \sigma \right)_j - v_i v_j - v_{*i} v_{*j} \right) d\sigma dv_*.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(2 \frac{v_i + v_{*i}}{2} \frac{v_j + v_{*j}}{2} + 2 \frac{|v - v_*|^2}{4} \sigma_i \sigma_j - v_i v_j - v_{*i} v_{*j} \right) d\sigma dv_* \\
&= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(-\frac{1}{2} v_i v_j - \frac{1}{2} v_{*i} v_{*j} + \frac{1}{6} \delta_{ij} (|v|^2 + |v_*|^2 - 2v \cdot v_*) \right) dv_* \\
&= -\frac{1}{2} (v_i v_j - \frac{1}{3} |v|^2 \delta_{ij}) = -\frac{1}{2} B_{ij}(v).
\end{aligned}$$

On remarque alors que si s et a sont des fonctions qui vérifient

$$2Q(M, M s)(v) = M(v) a(v),$$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-|v_*|^2/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left(s\left(\frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma\right) \right. \\
&\quad \left. + s\left(\frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma\right) - s(v) - s(v_*) \right) d\sigma dv_* = a(v), \\
&\int_{w \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-\frac{|w-u|^2}{2T}}}{(2\pi T)^{3/2}} \left(s\left(\frac{v + \frac{w-u}{\sqrt{T}}}{2} + \frac{|v - \frac{w-u}{\sqrt{T}}|}{2} \sigma\right) \right. \\
&\quad \left. + s\left(\frac{v + \frac{w-u}{\sqrt{T}}}{2} - \frac{|v - \frac{w-u}{\sqrt{T}}|}{2} \sigma\right) - s(v) - s\left(\frac{w-u}{\sqrt{T}}\right) \right) d\sigma dw = a(v), \\
&\int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-\frac{|v_*-u|^2}{2T}}}{(2\pi T)^{3/2}} \left(s\left(\frac{\frac{v-u}{\sqrt{T}} + \frac{v_*-u}{\sqrt{T}}}{2} + \frac{\left|\frac{v-u}{\sqrt{T}} - \frac{v_*-u}{\sqrt{T}}\right|}{2} \sigma\right) \right. \\
&\quad \left. + s\left(\frac{\frac{v-u}{\sqrt{T}} + \frac{v_*-u}{\sqrt{T}}}{2} - \frac{\left|\frac{v-u}{\sqrt{T}} - \frac{v_*-u}{\sqrt{T}}\right|}{2} \sigma\right) - s\left(\frac{v-u}{\sqrt{T}}\right) - s\left(\frac{v_*-u}{\sqrt{T}}\right) \right) d\sigma dw = a\left(\frac{v-u}{\sqrt{T}}\right), \\
&\int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in S^2} \frac{e^{-\frac{|v_*-u|^2}{2T}}}{(2\pi T)^{3/2}} \left(s\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right)(v') \right. \\
&\quad \left. + s\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right)(v'_*) - s\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right)(v) - s\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right)(v_*) \right) d\sigma dw = a\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right)(v),
\end{aligned}$$

et finalement

$$2Q(M_{\rho,u,T}, M_{\rho,u,T} s\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right)) = \rho M_{\rho,u,T} a\left(\frac{\cdot - u}{\sqrt{T}}\right),$$

avec

$$M_{\rho,u,T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}}.$$

Comme

$$2Q(M, MA)(v) = -\frac{1}{3}M(v)A(v), \quad 2Q(M, MB)(v) = -\frac{1}{2}M(v)B(v),$$

on en déduit que

$$2Q(M_\varepsilon, M_\varepsilon d_\varepsilon)(v) = M_\varepsilon \left(B\left(\frac{v-u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}\right) : \nabla_x u_\varepsilon + A\left(\frac{v-u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}\right) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) + O(\varepsilon),$$

lorsque

$$d_\varepsilon = -2\rho_\varepsilon^{-1} B\left(\frac{v-u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}\right) : \nabla_x u_\varepsilon - 3\rho_\varepsilon^{-1} A\left(\frac{v-u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}\right) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}.$$

On vérifie de plus que

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} M_\varepsilon(v) d_\varepsilon(v) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = 0.$$

On prend alors $s_\varepsilon = d_\varepsilon + O(\varepsilon)$.

On revient au développement de Hilbert :

$$\partial_t M_\varepsilon + v \cdot \nabla_x M_\varepsilon + \varepsilon \left(\partial_t (M_\varepsilon s_\varepsilon) + v \cdot \nabla_x (M_\varepsilon s_\varepsilon) \right) = \frac{1}{\varepsilon} Q(f_\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

et on en prend les trois premiers moments (masse, impulsion et énergie). On trouve :

$$\begin{aligned} & \int_{v \in \mathbb{R}^3} \left(\partial_t M_\varepsilon + v \cdot \nabla_x M_\varepsilon \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv \\ & + \varepsilon \int_{v \in \mathbb{R}^3} \left(\partial_t (M_\varepsilon s_\varepsilon) + v \cdot \nabla_x (M_\varepsilon s_\varepsilon) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv = O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

On voit donc que le seul calcul qui n'est pas déjà fait est :

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} v M_\varepsilon s_\varepsilon \begin{pmatrix} v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{v \in \mathbb{R}^3} v \frac{e^{-\frac{|v-u_\varepsilon|^2}{2T_\varepsilon}}}{(2\pi T)^{3/2}} \left(-2 B\left(\frac{v-u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}\right) : \nabla_x u_\varepsilon - 3 A\left(\frac{v-u_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}}\right) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) \begin{pmatrix} v_i \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} dv \\
&= \int_{w \in \mathbb{R}^3} (w \sqrt{T_\varepsilon} + u_\varepsilon) \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \left(-2 B(w) : \nabla_x u_\varepsilon - 3 A(w) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) \begin{pmatrix} w_i \sqrt{T_\varepsilon} + u_{i\varepsilon} \\ |w \sqrt{T_\varepsilon} + u_\varepsilon|^2/2 \end{pmatrix} dw \\
&= \int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \left(-2 B(w) : \nabla_x u_\varepsilon - 3 A(w) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) \begin{pmatrix} w_i w T_\varepsilon \\ |w|^2 w T_\varepsilon^{3/2}/2 + w(w \cdot u_\varepsilon) T_\varepsilon \end{pmatrix} dw
\end{aligned}$$

du fait des propriétés d'orthogonalité de A et B .

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
&\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \left(-3 A(w) \cdot \frac{\nabla_x T_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \right) \begin{pmatrix} w_i w T_\varepsilon \\ |w|^2 w T_\varepsilon^{3/2}/2 + w(w \cdot u_\varepsilon) T_\varepsilon \end{pmatrix} dw \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{15}{2} T_\varepsilon \nabla_x T_\varepsilon \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} (-2 B(w) : \nabla_x u_\varepsilon) w_i w_k T_\varepsilon dw \\
&= -2 \sum_p \sum_q \partial_{x_p} u_{\varepsilon q} \int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} (w_p w_q - \frac{1}{3} |w|^2) w_i w_k T_\varepsilon dw \\
&= -2 \sum_{p \neq q} \sum \partial_{x_p} u_{\varepsilon q} \int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} w_p^2 w_q^2 T_\varepsilon (\delta_{ip} \delta_{kq} + \delta_{iq} \delta_{kp}) dw \\
&\quad -2 \sum_p \partial_{x_p} u_{\varepsilon p} \int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} (w_p^2 - \frac{1}{3} |w|^2) T_\varepsilon w_i w_k dw \\
&= -2 T_\varepsilon (\partial_{x_i} u_{\varepsilon k} + \partial_{x_k} u_{\varepsilon i}) 1_{\{i \neq k\}} \\
&\quad -2 T_\varepsilon \sum_p \partial_{x_p} u_{\varepsilon p} \delta_{ik} \int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{2}{3} w_p^2 - \sum_{j \neq p} \frac{1}{3} w_j^2 \right) w_i^2 dw \\
&= -2 T_\varepsilon (\partial_{x_i} u_{\varepsilon k} + \partial_{x_k} u_{\varepsilon i}) 1_{\{i \neq k\}} - \frac{8}{3} T_\varepsilon \partial_{x_i} u_{\varepsilon i} \delta_{ik} + \sum_{p \neq i} \frac{4}{3} T_\varepsilon \partial_{x_p} u_{\varepsilon p} \delta_{ik}
\end{aligned}$$

$$= -2T_\varepsilon (\partial_{x_i} u_{\varepsilon k} + \partial_{x_k} u_{\varepsilon i}) + \frac{4}{3} T_\varepsilon (\nabla_x \cdot u_\varepsilon) \delta_{ik}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} & \int_{w \in \mathbb{R}^3} \frac{e^{-\frac{|w|^2}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} (-2B(w) : \nabla_x u_\varepsilon) \left[(w \cdot u_\varepsilon) T_\varepsilon + |w|^2 T_\varepsilon^{3/2} / 2 \right] w_k dw \\ &= -2 \sum_i T_\varepsilon (\partial_{x_i} u_{\varepsilon k} + \partial_{x_k} u_{\varepsilon i}) u_i + \frac{4}{3} T_\varepsilon (\nabla_x \cdot u_\varepsilon) u_k. \end{aligned}$$

On note classiquement $\sigma(u)_{ik} = \partial_{x_i} u_{\varepsilon k} + \partial_{x_k} u_{\varepsilon i}$ le tenseur des contraintes.

On obtient finalement les équations de Navier-Stokes des gaz parfaits monoatomiques compressibles pour les molécules maxwelliennes (i.-e. pour une section efficace de collision constante dans l'équation de Boltzmann) à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \\ & \partial_t (\rho_\varepsilon u_{i\varepsilon}) + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon u_{i\varepsilon}) + \partial_{x_i} (\rho_\varepsilon T_\varepsilon) \\ &= \varepsilon \sum_k \partial_{x_k} \left[2T_\varepsilon \sigma(u_\varepsilon)_{ik} - \frac{4}{3} T_\varepsilon (\nabla_x \cdot u_\varepsilon) \delta_{ik} \right] + O(\varepsilon^2), \\ & \partial_t (\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2) + \frac{3}{2} \rho_\varepsilon T_\varepsilon + \nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 u_\varepsilon) + \frac{5}{2} \rho_\varepsilon u_\varepsilon T_\varepsilon \\ &= \varepsilon \sum_k \partial_{x_k} \left[2T_\varepsilon \sum_i \sigma(u_\varepsilon)_{ik} u_{\varepsilon i} - \frac{4}{3} T_\varepsilon (\nabla_x \cdot u_\varepsilon) u_{\varepsilon k} + \frac{15}{2} T_\varepsilon \partial_{x_k} T_\varepsilon \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$