Méthodes Mathématiques pour la Physique

ENS de Cachan, 2011-12

1 Intégration, Transformée de Fourier et Convolution

1.1 Introduction

Dans toute cette section, on utilisera le mot "fonction" pour "fonction mesurable" et le mot "ensemble" pour "ensemble mesurable". Cela n'aura aucune conséquence pratique : on peut considérer sans risque (à moins de s'intéresser aux problèmes de logique mathématique) que toutes les fonctions et tous les ensembles sont mesurables.

On propose ici la description d'une intégrale (l'intégrale de Lebesgue) qui a un certain nombre d'avantages sur les intégrales définies traditionnellement (celle des fonctions continues par morceaux sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, présentée en général - soit à l'aide des sommes de Darboux : on l'appelle alors intégrale de Riemann, - soit à l'aide des fonctions en escalier et d'un théorème de prolongement : on l'appelle alors intégrale des fonctions réglées).

Parmi ces avantages, on peut citer :

1. Le traitement unifié des intégrales en toutes dimensions,
2. La possibilité de considérer une intégrale sur des sous-domaines compliqués, par exemple ceux du type $\{x \in \mathbb{R}^N, f(x) \geq p\}$ (c'est surtout utile en théorie des probabilités),
3. Des théorèmes de convergence dont les hypothèses sont souvent aisément vérifiables.

Cette partie du cours est largement inspirée par le chapitre 2 du livre de J.-M. Bony "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques". La plupart des théorèmes de cette partie ne seront pas démontrés dans le cours : les preuves sont souvent difficiles. Certaines démonstrations sont proposées en exercice. On trouvera l'ensemble des preuves très bien présenté par exemple dans l'ouvrage de W. Rudin "Real and Complex Analysis", chapitres 1 et 2 (qui existe aussi en version française).

1.2 Quelques notations et rappels

Lorsque A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$, on note 1_A la fonction (appelée parfois fonction indicatrice de A) définie par $1_A(x) = 1$ pour $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ pour $x \in A^c$ (avec $A^c = \mathbb{R}^N - A$).

Lorsque $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}^N$, on note

$$\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{x \in \mathbb{R}^N / \, \exists i \in \mathbb{N},\, x \in A_i\}.$$

Une telle union (dont l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$) est dite dénombrable.

On notera également $B(x, r)$ pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$ la boule ouverte de centre x et de rayon r : $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N / \, |y - x| < r\}$.

On rappelle que lorsque $U \subset \mathbb{R}^N$, l'ensemble U est ouvert quand pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.

Enfin, on note $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On étend à cet ensemble de manière naturelle l'addition (par $x + (+\infty) = +\infty$ pour tout $x \in \bar{\mathbb{R}}_+$), l'ordre (par $+\infty \geq x$ pour $x \in \bar{\mathbb{R}}_+$) et la multiplication par des réels non nuls (par $x \times (+\infty) = +\infty$ pour $x \in \bar{\mathbb{R}}_+^*$).

1.3 L'intégrale de Lebesgue des fonctions positives

On admet sans démonstration la proposition suivante, qui caractérise l'intégrale de Lebesgue des fonctions positives :

Proposition : Soit $f : \mathbb{R}^N \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une fonction. On admettra que l'on peut construire une unique quantité de $\bar{\mathbb{R}}_+$ appelée intégrale de Lebesgue (N-dimensionnelle) de f et notée $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx$ (où, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\int_{\mathbb{R}^N} f$, ou même $\int f$) qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Linéarité : Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, $f, g : \mathbb{R}^N \to \bar{\mathbb{R}}_+$,

$$\int \Big(\lambda\, f + \mu\, g\Big) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

   Cette propriété entraîne celle de monotonie : si $f, g : \mathbb{R}^N \to \bar{\mathbb{R}}_+$, $f \leq g$, alors

$$\int f \leq \int g.$$

2. Valeur sur un pavé de $\mathbb{R}^N$: pour $a_1 \leq b_1$,..,$a_N \leq b_N$:

$$\int 1_{[a_1,b_1]\times..\times[a_N,b_N]} = (b_1 - a_1)\,..\,(b_N - a_N).$$

3. Convergence monotone : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **croissante** (i.-e. telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $p \geq q \Rightarrow f_p(x) \geq f_q(x)$) de fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}_+$ (ou même $\bar{\mathbb{R}}_+$). Si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f_n(x) \to f(x)$ (avec $f(x) \in \bar{\mathbb{R}}_+$, limite qui existe toujours, car toute suite croissante tend vers une limite finie ou vers $+\infty$), alors $\int f_n \to \int f$.

4. Théorème de Tonelli : Si $x \in \mathbb{R}^P$, $y \in \mathbb{R}^Q$, $P+Q = N$, et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^P} \left(\int_{\mathbb{R}^Q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^Q} \left(\int_{\mathbb{R}^P} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

5. Théorème de Lusin : Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, nulle en dehors d'un ensemble borné. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue et nulle en dehors d'un ensemble borné, telle que $\int 1_{f\neq g} \leq \varepsilon$, et $\sup|g| \leq \sup|f|$.

On voit donc que pour ce qui concerne les fonctions positives, on peut toujours écrire leur intégrale sur $\mathbb{R}^N$. De plus, pour $N > 1$, on peut effectuer les intégrations par rapport aux différentes variables dans n'importe quel ordre.

La définition suivante permet de calculer des intégrales de fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, si compliqués soient-ils.

Définition : On définit pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ et $f : A \to \bar{\mathbb{R}}_+$ l'intégrale de Lebesgue (N-dimensionnelle) de f sur A par $\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}$, avec $\tilde{f} = f$ sur A et $\tilde{f} = 0$ sur A^c.

Un des avantages de l'intégrale de Lebesgue est que l'on peut utiliser des ensembles compliqués pour faire des estimations. Par exemple, on a de manière instantanée des inégalités de type Bienaymé-Tchébytcheff :

$$\int f \geq p \int_{\{x,\, f(x)\geq p\}} 1.$$

1.4 Mesure des ensembles, ensembles négligeables

Définition : On définit lorsque $A \subset \mathbb{R}^N$ la *mesure de Lebesgue N-dimensionnelle* de A par $dx(A) = \int_{\mathbb{R}^N} 1_A$. C'est un élément de $\bar{\mathbb{R}}_+$

Il est clair que la mesure est croissante par rapport à l'inclusion : si $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$, on a $dx(A) \leq dx(B)$. On a de plus la

Proposition : La mesure d'une union finie (ou dénombrable) d'ensembles est inférieure à la somme (éventuellement dénombrable) des mesures des ensembles :

$$dx(A_1 \cup .. \cup A_n) \leq dx(A_1) + .. + dx(A_n),$$

$$dx(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} dx(A_i).$$

Preuve : Si $x \in A_1 \cup .. \cup A_n$, alors $\exists i \in \{1, .., n\}, x \in A_i$. Donc $1_{A_i}(x) = 1$, et $1_{A_1}(x) + .. + 1_{A_n}(x) \geq 1$. On utilise la convergence monotone pour conclure dans le cas dénombrable.

Définition : On dit d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ qu'il est négligeable s'il est de mesure (N-dimensionnelle) nulle (i.-e. $dx(A) = 0$).

La proposition précédente implique immédiatement la

Proposition : Toute union (finie ou) dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

La proposition suivante permet dans la plupart des cas d'identifier des ensembles de mesure nulle.

Proposition :

1. Tous les sous-ensembles finis (ou plus généralement dénombrables) de $\mathbb{R}$ sont de mesure (1-dimensionnelle) nulle.

2. Toutes les courbes de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire les images d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) sont de mesure (2-dimensionnelle) nulle (de même bien sûr que leurs unions finies ou dénombrables, et leurs sous-ensembles).

3. Toutes les surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire les images d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ par une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$) sont de mesure (3-dimensionnelle) nulle (de même bien sûr que leurs unions finies ou dénombrables, et leurs sous-ensembles).

Preuve : Pour le premier point, on remarque simplement que $dx(\{x_0\}) \leq dx([x_0, x_0 + 1/n]) = 1/n$ (propriété de la valeur sur un pavé de $\mathbb{R}^N$), et on fait tendre n vers l'infini.

Pour le second point, on observe qu'on peut toujours se ramener à l'image d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}$ est une union dénombrable de tels intervalles). Si l'on considère alors $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, on peut trouver $M \geq 0$ tel que $|f'| \leq M$ sur $[a, b]$. On a alors

$$f([a,b]) = \cup_{i=0}^{n-1} f\left([a + (b-a)\,\frac{i}{n}, a + (b-a)\,\frac{i+1}{n}] \right)$$

$$\subset \cup_{i=0}^{n-1} B\left(f(a + (b-a)\,\frac{i+1/2}{n}), \frac{M\,(b-a)}{2n} \right).$$

Mais ce dernier ensemble est inclus dans un carré de côté de longueur $M\,(b-a)/n$, il est donc de mesure au plus $4\,M^2\,(b-a)^2/n$ (propriété de la valeur sur un pavé de $\mathbb{R}^N$). On conclut de nouveau en faisant tendre n vers l'infini.

La démonstration du dernier point est similaire.

Définition : On dit d'une propriété relative à $\mathbb{R}^N$ (où à l'un de ses sous-ensembles) qu'elle est vérifiée presque partout (en abrégé p.p.) ou presque sûrement (en abrégé p.s.) si elle est vérifiée sauf sur un ensemble de mesure (N-dimensionnelle) nulle.

La proposition suivante étend à l'ensemble des fonctions les propriétés relatives à l'annulation de l'intégrale d'une fonction continue positive.

Proposition : Soit $f : A \to \mathbb{R}_+$. Alors $\int_A f = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.

Preuve : On suppose que $\int_A f = 0$. On remarque que $dx(\{x \in A, f(x) \geq 1/n\}) \leq n \int_A f = 0$. Or $\{x \in A, f(x) > 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in A, f(x) \geq 1/n\}$, donc $dx(\{x \in A, f(x) > 0\}) = 0$. Réciproquement, on suppose que $f = 0$ p.p. On note $B = \{x \in A, f(x) > 0\}$, c'est donc un ensemble de mesure nulle. On a d'après le théorème de convergence monotone : $\int_B f = \lim_{n \to +\infty} \int_B f\, 1_{\{f(x) \leq n\}}$. Cette dernière intégrale est inférieure à $n\, dx(B)$, elle est donc nulle. Finalement, $\int_B f = 0$, et $\int_A f = 0$.

1.5 L'intégrale des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : Pour $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, on note $f^+ = f\,1_{f\geq 0}$, $f^- = -f\,1_{f<0}$. On a bien sûr $f = f^+ - f^-$, et $|f| = f^+ + f^-$.

Cette manière de décomposer f sous forme de la différence de deux fonctions à valeurs positives permet d'étendre "par linéarité" l'intégrale de Lebesgue (en posant $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$). Néanmoins cette formule n'a de sens que si l'on n'a pas simultanément $\int_A f^+ = +\infty$ et $\int_A f^- = +\infty$. Cette remarque motive la définition suivante :

Définition : Une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que $\int_A |f| < +\infty$ est dite intégrable (au sens de Lebesgue). On définit alors son intégrale (de Lebesgue) par la formule $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$ (ces deux dernières quantités sont finies puisque $|f| = f^+ + f^-$).

Attention : Ce n'est (presque) jamais grâce à cette formule que l'on calcule les intégrales en pratique.

L'intégrale ainsi étendue aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est encore linéaire : si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifient $\int |f| < +\infty$, $\int |g| < +\infty$, alors $\int |\lambda\, f + \mu\, g| < +\infty$ et

$$\int (\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

Elle est également toujours monotone : si $\int |f| < +\infty$, $\int |g| < +\infty$ et $f \leq g$, alors $\int f \leq \int g$. En particulier, on voit que $|\int f| \leq \int |f|$, car $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$.

Lorsque les fonctions sont à valeurs complexes, on peut les intégrer en utilisant la formule (pour f, g à valeurs réelles)

$$\int (f + i\, g) = \int f + i \int g.$$

De même, pour les fonctions à valeurs vectorielles (i.-e. à valeurs dans $\mathbb{R}^P$ ou $\mathbb{C}^p$), on intègre coordonnées par coordonnées.

On conclut par une proposition qui montre que du point de vue des intégrales, on n'a pas besoin de connaître une fonction en chacun de ses points, mais seulement en presque tous ses points.

Proposition : Si $f, g : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables, et si $f = g$ p.p., alors $\int f = \int g$.

Preuve : Comme $f - g = 0$ p.p. Alors il en est de même de $(f-g)^+$ et de $(f-g)^-$. On en déduit que $\int_A (f-g)^+ = \int_A (f-g)^- = 0$, et donc que $\int_A (f-g) = 0$ On conclut par linéarité de l'intégrale.

1.6 Les grands théorèmes d'intégration

Théorème (convergence dominée) : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour presque tout $x \in A$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. On suppose de plus que pour presque tout $x \in A$, on a $|f_n(x)| \le g(x)$, avec g intégrable (i.e. $\int_A |g(x)|\, dx < +\infty$). Alors ($\int_A |f(x)|\, dx < +\infty$), $\int_A |f_n - f| \to 0$ et $\int_A f_n \to \int_A f$.

Remarque : C'est bien de la convergence presque partout dont on a besoin dans l'hypothèse du théorème et non de la convergence ponctuelle (appelée aussi convergence simple). Le théorème de convergence dominée est démontré à partir du théorème de convergence monotone en exercice.

Contre-exemple : La "fabrique de chapeaux" et la "bosse glissante" sont typiques de la mise en défaut de la convergence de l'intégrale lorsque l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée. D'un certain point de vue, ces deux exemples "épuisent" en fait les pathologies possibles.

Il s'agit d'une part de la suite de fonctions continues $f_n(x) = (n - n^2 |x|)\, 1_{\{|x|\le 1/n\}}$ ("fabrique de chapeaux"): on a $f_n \to 0$ p.p. mais $\int f_n = 1$; d'autre part de la suite de fonctions continues $f_n(x) = (1 - |x-n|)\, 1_{\{|x-n|\le 1\}}$ ("bosse glissante"): on a de nouveau $f_n \to 0$ p.p. mais $\int f_n = 1$ (on a utilisé ici la notation usuelle en théorie des probabilités où l'ensemble intervenant dans la fonction caractéristique est sous-entendu : $1_{\{|x-n|\le 1\}}$ à la place de $1_{\{x\in\mathbb{R}, |x-n|\le 1\}}$).

Exemple : On a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi (\sin(1/x))^n\, dx = 0.$$

On ne se préoccupe pas du point 0 où $\sin(1/x)$ n'est pas défini, car un point est de mesure nulle. On a $(\sin(1/x))^n \to 0$ pour presque tout $x \in [0, \pi]$, en effet les seuls points où cette limite n'a pas lieu sont les $(k\pi + \pi/2)^{-1}$, avec $k \in \mathbb{N}$, qui forment un ensemble dénombrable.

De même, on peut considérer l'exemple suivant, en dimension supérieure :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{(x,y)\in[0,\pi]^2}\left(\sin\left(\frac{1}{x-\sin y}\right)\right)^n=0.$$

De nouveau, l'ensemble des $\{(x,y)\in[0,\pi]^2, x=\sin y\}$ est de mesure (2-dimensionnelle) nulle. Sur cet ensemble, la fonction $\sin(\frac{1}{x-\sin y})$ n'est pas définie mais on n'a pas à s'en préoccuper. De même, on a $(\sin(\frac{1}{x-\sin y}))^n\to 0$ pour presque tout $(x,y)\in[0,\pi]^2$. En effet, les seuls points où cette limite n'a pas lieu sont les $\{(x,y)\in[0,\pi]^2, \exists k\in\mathbb{Z}, x-\sin y=(k\pi+\pi/2)^{-1}\}$, qui forment une union dénombrables de courbes.

Enfin l'exemple suivant montre que l'on peut traiter de la même manière des intégrales sur des ensembles non bornés :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Big(1+(\sin(1/x))^n\Big)\,e^{-x}\,dx=1.$$

Le théorème de convergence dominée est souvent le bon outil pour échanger les intégrales et les séries.

Exemple : On a l'égalité

$$\int_0^1\sin(e^x)\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\frac{e^{2k+1}-1}{2k+1}.$$

On développe le sinus en série entière. On remarque que l'hypothèse de domination est vérifiée car

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{e^{(2k+1)\,x}}{(2k+1)!}\right| &\le \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{(2k+1)\,x}}{(2k+1)!}\\ &\le \sinh(e^x),\end{aligned}$$

et $x\mapsto\sinh(e^x)$ est intégrable sur $[0,1]$.

Le théorème suivant permet de clarifier la situation en ce qui concerne les intégrales multiples. C'est l'extension du théorème de Tonelli aux fonctions à valeurs réelles (ou complexes).

Théorème (Fubini) : Si $x\in\mathbb{R}^P$, $y\in\mathbb{R}^Q$, $P+Q=N$, $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, et si $\int_{R^N}|f|<+\infty$, alors (pour presque tout $x\in\mathbb{R}^P$, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^Q$, et $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^Q}f(x,y)\,dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}^P$; pour presque tout $y \in \mathbb{R}^Q$, la fonction $f(\cdot, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^P$ et $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^P} f(x,y)\,dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}^Q$,)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^P} \left(\int_{\mathbb{R}^Q} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^Q} \left(\int_{\mathbb{R}^P} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

En pratique, on vérifie l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^N} |f| < +\infty$ en utilisant le théorème de Tonelli (qui lui, n'a "pas d'hypothèse").

Preuve : On utilise le théorème de Tonelli pour f^+ et f^-.

Exemple : On a grâce à l' interversion des intégrales, et pour tout $A > 0$:

$$\int_{y=0}^{A} \int_{x=0}^{\infty} \sin y\, e^{-x\,y}\, dxdy = \int_0^A \frac{\sin y}{y}\, dy$$

et

$$\int_{y=0}^{A} \int_{x=0}^{\infty} \sin y\, e^{-x\,y}\, dxdy = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2i} \left\{ \frac{e^{A\,(i-x)}}{i-x} + \frac{e^{-A\,(i+x)}}{i+x} \right\} \right) dx.$$

Le théorème suivant, de démonstration difficile, permet de généraliser à la dimension quelconque (et aux fonctions intégrables quelconques) la formule de changement de variable dans les intégrales simples (et pour les fonctions continues). La preuve de quelques cas particuliers est abordée en exercice.

Théorème (Changement de variable) : Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^N$ et ϕ une bijection de classe C^1 de U dans V dont la réciproque est également de classe C^1 (une telle application est dite difféomorphisme de classe C^1). On note $Jac(\phi)$ le déterminant de la matrice Jacobienne $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j})_{ij}$. Alors pour toute fonction $f : V \to \mathbb{R}$ telle que $\int_V |f| < +\infty$, on a $\int_U |f o\, \phi|\; |Jac(\phi)| < +\infty$ et

$$\int_V f = \int_U f o\, \phi\; |Jac(\phi)|.$$

La même formule est valable pour toute fonction $f : V \to \bar{\mathbb{R}}_+$, sans qu'elle n'ait besoin d'être intégrable.

Remarque : On est souvent amené à utiliser ce théorème dans des situations où le changement de variable n'a pas lieu entre des ouverts. On peut le plus souvent se ramener au cas précédent en enlevant des ensembles de mesure nulle.

Exemple : On considère le passage en coordonnées polaires : $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\mapsto (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 - \{(x,0), x \geq 0\}$ est une bijection de classe C^1 dont la réciproque est également de classe C^1 (il est possible d'expliciter cette réciproque à partir de la fonction arctan par exemple). Le déterminant Jacobien de cette transformation est, comme on peut s'y attendre : $(r,\theta) \mapsto r$.

On en déduit la formule (pour des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^2$ ou à valeurs positives)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Un cas particulier de cette formule permet d'obtenir l'égalité de $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ avec $\left(\int_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]} r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\right)^{1/2}$ (et donc avec $(2\pi)^{1/2}$).

1.7 Le lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale "usuelle"

Dans les exemples donnés précédemment, on a utilisé sans justification des formules valables pour les intégrales traditionnelles (intégrale des fonctions continues sur un intervalle borné, intégrale impropre), par exemple

$$\int_0^{+\infty} r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = 1.$$

On donne dans ce paragraphe les résultats précis qui justifient cette utilisation. Les preuves sont données en exercice à la fin du chapitre.

Proposition : Si f est une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$, il y a égalité entre l'intégrale de Lebesgue de f sur cet intervalle et l'intégrale "usuelle" (celle de Riemann, définie à partir des sommes de Darboux, ou celle des fonctions réglées, définie à partir des fonctions en escalier). En particulier, on a toujours $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$ lorsque f est continue sur $[a,b]$ $(a < x < b)$, et $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$ lorsque f est de classe C^1 sur $[a,b]$.

La théorie de l'intégrale de Lebesgue contient par ailleurs celle des intégrales impropres des fonctions positives et, plus généralement, celle des intégrales impropres absolument convergentes.

Proposition : Soit f une fonction **positive** sur $[a, b[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$, et $b > a$, éventuellement infini) et continue (ou continue par morceaux) sur $[a, b[$. Il y a convergence de l'intégrale impropre (i.-e. la quantité $\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} f$ à une limite finie) si et seulement si l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b[} f$ est finie. De plus on a égalité entre l'intégrale de f au sens de Lebesgue sur $[a, b[$ et l'intégrale impropre (i.e. $\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} f$).

Soit f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur $[a, b[$ (pour un certain $a \in \mathbb{R}$, et $b > a$, éventuellement infini). Il y a convergence **absolue** de l'intégrale impropre (i.-e. la quantité $\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} |f|$ à une limite finie) si et seulement si l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,b[} |f|$ est finie. De plus on a égalité entre l'intégrale de f au sens de Lebesgue sur $[a, b[$ et l'intégrale impropre (i.e. $\lim_{x \to b} \int_{[a,x]} f$).

Remarque : Les intégrales impropres semi-convergentes ne sont pas des intégrales de Lebesgue (i.e leur intégrande n'est pas intégrable). En toute rigueur, il faudrait écrire $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ et non $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. En pratique, on garde bien sûr la notation "contractée" $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

1.8 L'espace L^1

L'intégrale de Lebesgue d'une fonction ne changeant pas lorsque la fonction est modifiée sur un ensemble de mesure nulle, il est naturel d'introduire un ensemble de "fonctions" définies presque partout. C'est ce qui permet de fabriquer une norme à partir de l'intégrale.

Définition : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. On appelle $L^1(A)$ l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur A, c'est-à-dire telles que $\int_A |f| < +\infty$, quotienté par la relation d'équivalence $f \sim g$ lorsque f et g sont égales presque partout (autrement dit, L^1 est l'espace des fonctions intégrables sur A où on a identifié les fonctions qui sont égales p.p.). Pour $f \in L^1(A)$, l'intégrale de Lebesgue $\int_A f$ est bien définie.

Exemple : Les classes d'équivalence associées aux fonctions $x \mapsto (1 + |x|^2)^{r/2}$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ pour $r < -2$. On le voit par passage aux coordonnées polaires puis en utilisant l'identité entre intégrales impropres de fonctions positives et intégrales de Lebesgue de fonctions positives.

Proposition : On définit une norme sur $L^1(A)$ en posant

$$||f||_{L^1(A)} = \int_A |f|.$$

Preuve : L'inégalité triangulaire et la propriété relative à la multiplication par un scalaire sont évidentes. On sait par ailleurs que $\int_A |f| = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p.

On rappelle la définition d'une fonction à support compact dans $\mathbb{R}^N$. Il s'agit d'une fonction qui vaut 0 en dehors d'un ensemble borné.

Proposition : Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour cette norme. Autrement dit, pour tout élément f de $L^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact telle que $||f_n - f||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$.

Preuve : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{R\to+\infty} \int f\, 1_{B(0,R)^c}\, 1_{f\le R} = 0$. On peut donc choisir $R > 0$ suffisamment grand pour que $||f - f\, 1_{B(0,R)^c}\, 1_{f\le R}||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le \frac{1}{2n}$. On applique ensuite le théorème de Lusin à $f\, 1_{B(0,R)^c}\, 1_{f\le R}$. On considère f_n telle que $dx(\{f_n \ne f\, 1_{B(0,R)^c}\, 1_{f\le R}\}) \le \frac{1}{4Rn}$ et $|f_n| \le R$. Alors $||f_n - f||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le \frac{1}{n}$.

Définition : On note $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à A appartient à $L^1(A)$ pour tous les A **bornés** inclus dans $\mathbb{R}^N$.

Exemple : Toutes les fonctions bornées sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Les classes d'équivalence associées aux fonctions $x \mapsto |x|^r$ sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ pour $r > -2$.

Remarque : En pratique, on ne parle dans la suite que de "fonctions" de L^1. Il faut néanmoins garder à l'esprit que pour de telles "fonctions", les objets du type $\int_A f$ sont bien définis, mais pas les valeurs en un point donné du type $f(x_0)$.

1.9 Intégrales dépendant d'un paramètre

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}^N$, $U \subset \mathbb{R}^P$ ouvert, et $f : A \times U \to \mathbb{R}$ telle que $f(a,\cdot)$ est continue sur U pour presque tout $a \in A$ et telle qu'il existe $g \in L^1(A)$ vérifiant pour presque tout $a \in A$,

$$\forall x \in U, \qquad |f(a,x)| \le g(a).$$

Alors $\int_A f(a,\cdot)\, da$ est bien définie et continue sur U.

Preuve : On utilise le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la continuité (c'est-à-dire le fait qu'une fonction g (définie sur un voisinage de $x \in \mathbb{R}^N$) est continue en x si et seulement si pour toute suite $x_n \to x$, on a $g(x_n) \to g(x)$).

Remarque : On peut en pratique prendre pour U n'importe quel voisinage de x_0 (aussi petit qu'on le souhaite) pour appliquer la proposition. On peut aussi ne pas utiliser la proposition et vérifier directement la continuité en utilisant le théorème de convergence dominée.

Exemple : La fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

est bien définie et continue sur cet ensemble.

De même, pour $n \in \mathbb{Z}$, la fonction de Bessel J_n définie par

$$J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{i\,x\,\sin\theta - i\,n\,\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition : Soit $A \subset \mathbb{R}^N$, $U \subset \mathbb{R}^P$ ouvert, et $f : A \times U \to \mathbb{R}$ telle que $f(\cdot, x)$ est intégrable pour $x \in U$, $f(a, \cdot)$ est dérivable par rapport à la i-ième variable (du second groupe) sur U pour presque tout $a \in A$ (le presque partout est supposé indépendant de $x \in U$) de dérivée $\partial_{x_i} f(a, \cdot)$ et telle qu'il existe $g \in L^1(A)$ vérifiant pour presque tout $a \in A$,

$$\forall x \in U, \qquad |\partial_{x_i} f(a, x)| \le g(a).$$

Alors $\int_A f(a, \cdot)\, da$ est dérivable par rapport à la i-ième variable (du second groupe) en tout point x de U de dérivée $\int_A \partial_{x_i} f(a, x)\, da$.

Preuve : On la fait pour U intervalle de $\mathbb{R}$.

On remarque que pour toute suite $h_n \to 0$,

$$\frac{1}{h_n}\left(\int_A f(a, x + h_n)\, da - \int_A f(a, x)\, da \right) - \int_A \partial_x f(a, x)\, da$$

$$= \int_A \left(\frac{f(a, x + h_n) - f(a, x)}{h_n} - \partial_x f(a, x) \right) da.$$

On voit alors que (pour presque tout $a \in A$),

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a, x + h_n) - f(a, x)}{h_n} - \partial_x f(a, x) = 0.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a, x + h_n) - f(a, x)}{h_n} - \partial_x f(a, x) \right| \\ = & \left| \partial_x f(a, x + \theta(x, a, h_n)\, h_n) - \partial_x f(a, x) \right| \\ & \leq 2\, g(a) \end{aligned}$$

d'après le théorème des accroissements finis. On conclut alors en utilisant le théorème de convergence dominée.

Contre-exemple : Le théorème des accroissements finis ne peut plus être appliqué correctement si par exemple pour chaque $x \in U$, il existe $a \in A$ tel que $x \mapsto f(a, x)$ n'est pas dérivable. On peut le voir par exemple avec la fonction $f(a, x) = 1_{a \leq x}$. De manière plus générale, la dérivation "en un point", au contraire de la dérivation "sur un ouvert", n'est pas bien compatible avec l'intégration de Lebesgue.

Exemple : Les fonctions Γ et J_n (pour $n \in \mathbb{Z}$) sont dérivables (sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ respectivement). Les dérivées de ces fonctions sont données par les formules

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt,$$

et

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= i \int_0^{2\pi} \sin\theta\, e^{i\,x\,\sin\theta - i\,n\,\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\,(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Remarque : Les théorèmes de ce chapitre sont donnés dans un cadre général : dimension quelconque, domaine d'intégration fini ou pas. Ils permettent de traiter la majorité des situations. Ils sont néanmoins impuissants quand sont en jeu des intégrales semi-convergentes. Un cas typique est celui de la fonction d'Airy

$$Ai(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,t\,x + i\,t^3/3}\, dt.$$

On rappelle que cette intégrale n'est pas une intégrale de Lebesgue.

1.10 Transformée de Fourier et convolution dans L^1

Définition : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on appelle transformée de Fourier de f et on note $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}f$) la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-i\, x\cdot\xi}\, dx.$$

Remarque : Il existe de nombreuses variantes pour la définition de la transformée de Fourier (le $-i$ est parfois remplacé par i, dx est parfois remplacé par $\frac{dx}{(2\pi)^{N/2}}$, etc.).
La transformée de Fourier ne dépend que de la classe de fonctions (à un ensemble de mesure nulle près) et pas de la fonction elle-même.

Exemple : La transformée de Fourier (dans $\mathbb{R}$) de $x \mapsto e^{-|x|}$ est $\xi \mapsto \frac{2}{1+\xi^2}$. Celle (toujours dans $\mathbb{R}$) de $x \mapsto 1_{[-a,a]}(x)$ est $\xi \mapsto \frac{2\,\sin(a\,\xi)}{\xi}$.

Proposition : La fonction $x \in \mathbb{R}^N \mapsto e^{-|x|^2/2}$ a pour transformée de Fourier la fonction $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto (2\pi)^{N/2}\, e^{-|\xi|^2/2}$.

Preuve : On commence par le cas où $N = 1$. Si on note g la transformée de Fourier de $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2/2}$, on a

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2 - ix\xi}\, dx,$$

donc

$$g'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\,x)\, e^{-x^2/2-ix\xi}\, dx$$

$$= i \int_{-\infty}^{+\infty} (-x - i\,\xi)\, e^{-x^2/2-ix\xi}\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, e^{-x^2/2-ix\xi}\, dx$$

$$= -\xi\, g(\xi).$$

De plus $g(0) = (2\pi)^{1/2}$. Donc $g(\xi) = (2\pi)^{1/2}\, e^{-\xi^2/2}$.

On peut facilement ramener le calcul en dimension N à celui en dimension 1.

Proposition : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier de f est une fonction continue et bornée (par $||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}$).

Preuve : La continuité est une conséquence du théorème sur les intégrales à paramètre. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$ est continue, et

$$\left| e^{-ix\cdot\xi} f(x) \right| \le |f(x)|.$$

Or on a supposé que $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
Enfin,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx \right| \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx.$$

Remarque : on peut aussi montrer que la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tend vers 0 à l'infini (lemme de Riemann-Lebesgue). Ceci est fait en exercice.

Proposition : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $x_i\, f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $\hat{f}$ est dérivable par rapport à la i-ième variable et cette dérivée est

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \hat{f}(\xi) = -i\, \widehat{x_i\, f}(\xi).$$

De même, pour $f \in L^1 \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\partial_i f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\xi) = i\, \xi_i\, \hat{f}(\xi).$$

Preuve : La première partie de la proposition est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe somme.
La seconde formule s'obtient par intégration par parties (elle est immédiate lorsque $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$). Pour se ramener à un domaine borné, on introduit une famille de fonctions $\phi_n(y)$ paires de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ de classe C^1 telle que

$$\phi_n|_{[0,n]} = 1, \qquad \phi_n|_{[n+1,+\infty[} = 0, \qquad |\phi_n'| \le 2.$$

Le théorème de convergence dominée implique que pour toute fonction g de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ de $\phi_n\, g$ vers g et de $\phi_n' g$ vers 0.
On remarque alors que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\, \partial_i f(x)\, \phi_n(x_i)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \phi_n'(x_i)\, dx$$

$$+\, i\, \xi_i \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, \phi_n(x_i)\, dx.$$

On conclut en faisant tendre n vers l'infini.

Exemple : En appliquant la première formule à la fonction $x \in \mathbb{R}^N \mapsto e^{-|x|^2/2}$, on voit que la transformée de Fourier de la fonction $x \in \mathbb{R}^N \mapsto -x_i\, e^{-|x|^2/2}$ est la fonction $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto i\,\xi_i\,(2\pi)^{N/2}\, e^{-|\xi|^2/2}$.

Remarque : Ce lien entre la transformée de Fourier et les dérivations est essentiel. On voit que la transformée de Fourier "diagonalise" les dérivations. Cela permettra de calculer de manière explicite dans de nombreuses situations des solutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Proposition : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$, on note $\tau_h f(x) = f(x+h)$ et $d_\lambda f(x) = f(\lambda\, x)$ la translatée et la dilatée de f. On a

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{i\,h\cdot\xi}\,\hat{f}(\xi)$$

et

$$\widehat{d_\lambda f}(\xi) = \lambda^{-N}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda}) = \lambda^{-N} d_{\lambda^{-1}}\hat{f}(\xi).$$

Preuve : Ces formules s'obtiennent immédiatement par changement de variable.

Définition - Proposition : Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^N} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

On définit ainsi une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$, appelée convolée de f et g. L'opération de convolution est commutative (i.e. pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f * g = g * f$).

Preuve : On voit que, grâce au changement de variable $z = x - y$,

$$\int_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{y\in\mathbb{R}^N} |f(y)|\,|g(x-y)|\, dydx \le ||f||_{L^1(\mathbb{R}^N)}\, ||g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Le théorème de Fubini implique que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(y)\, g(x-y)$ est une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$, et $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
La commutatitivité résulte du changement de variable $z = y - x$.

Exemple : La convolée de $1_{[-a,a]}$ et $1_{[-b,b]}$ pour $b \ge a$ est la fonction paire qui vaut 0 sur $[a+b, +\infty[$, $2a$ sur $[0, b-a[$ et $x \mapsto a+b-x$ sur $[b-a, a+b]$. En effet c'est la fonction $x \mapsto \int_{x-a}^{x+a} 1_{[-b,b]}(z)\, dz$.

Remarque : Beaucoup de problèmes différentiels peuvent se résoudre en terme de convolution. Ainsi, si g est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ nulle sur $\mathbb{R}_-$, la solution du problème de Cauchy $f' + f = g$, $f(0) = 0$, est donnée par la formule

$$f(t) = \int_0^t g(s)\, e^{-(t-s)}\, ds,$$

si bien que $f = g * (t \mapsto e^{-t}\, 1_{\mathbb{R}_+}(t))$.

On note $C_c^p(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions p fois continûment dérivables à support compact (c'est-à-dire nulles en dehors d'un ensemble borné). Pour $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\alpha = (i_1, .., i_N)$, on note $\partial_\alpha = \partial_{x_1}^{i_1} .. \partial_{x_N}^{i_N}$.

Proposition : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in C_c^p(\mathbb{R}^N)$, on a $f * g \in C^p(\mathbb{R}^N)$, et pour $|\alpha| \le p$,

$$\partial_\alpha(f * g) = f * \partial_\alpha g.$$

Preuve : C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe somme (et du théorème de "continuité" sous le signe somme). On le détaille pour la dimension $N = 1$ et pour la dérivée première.
On voit que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(y)\, g(x - y)$ est dérivable. De plus,

$$|f(y)\, g'(x - y)| \le ||g'||_\infty\, |f(y)|,$$

et on a supposé que f est intégrable.

Définition : On appelle suite régularisante (sur $\mathbb{R}^N$) une suite de fonctions $(\phi_n)_{n \ge 1}$ définie par

$$\phi_n(x) = n^N\, \phi(n\, x),$$

où ϕ est une fonction positive, de classe C^∞, d'intégrale 1, et de support inclus dans la boule unité $B(0, 1)$ de $\mathbb{R}^N$. On montre en exercice l'existence d'une telle fonction ϕ.

Proposition : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la suite régularisante $f * \phi_n$ converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers f. On en déduit la densité de $C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^N)$).

Preuve : On le montre tout d'abord pour f continue (à support compact (par exemple inclus dans $B(0, R)$) pour rester dans le cadre des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$). On voit que

$$f * \phi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - \frac{z}{n})\, \phi(z)\, dz.$$

Or pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{n\to+\infty} f(x-\frac{z}{n}) = f(x)$ car f est continue, et

$$|f(x-\frac{z}{n})\,\phi(z)| \le ||f||_\infty\,|\phi(z)|,$$

et cette dernière fonction est intégrable, donc (pour tout $x \in \mathbb{R}^N$)

$$\lim_{n\to+\infty} f*\phi_n(x) = f(x).$$

Comme de plus

$$|f*\phi_n(x) - f(x)| \le 2\,||f||_\infty\,1_{B(0,R+1/n)},$$

$$\le 2\,||f||_\infty\,1_{B(0,R+1/n)},$$

on a la convergence dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

On utilise ensuite la densité des fonctions continues (à support compact) dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^N)$).

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Il existe g continue à support compact telle que $||f-g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le \varepsilon/3$. On a alors

$$\begin{aligned}||f*\phi_n - f||_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\le ||g*\phi_n - g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &+ ||(f-g)*\phi_n||_{L^1(\mathbb{R}^N)} + ||f-g||_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\le 2\,\varepsilon/3 + ||g*\phi_n - g||_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Mais pour n assez grand, ce dernier terme est inférieur à $\varepsilon/3$.

Proposition : Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{f*g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

Preuve : C'est une conséquence du changement de variables $z = x-y$.

Exemple : La convolée de deux Gaussiennes est une Gaussienne. Plus précisément, si on note $M_{\rho,u,T}(x) = \frac{\rho}{(2\pi\,T)^{N/2}} e^{-\frac{|x-u|^2}{2T}}$ la Gaussienne de paramètres $\rho \ge 0$, $u \in \mathbb{R}^N$, $T > 0$, en utilisant les translations et les dilatations on obtient

$$\widehat{M_{\rho,u,T}}(\xi) = \rho\, e^{-i\,u\cdot\xi - \frac{T}{2}\,|\xi|^2}$$

si bien que si l'on admet l'injectivité de la transformée de Fourier (démontrée à la proposition suivante) on a la formule

$$M_{\rho_1,u_1,T_1} * M_{\rho_2,u_2,T_2} = M_{\rho_1\,\rho_2,u_1+u_2,T_1+T_2}.$$

Remarque : Cette propriété est essentielle en théorie des probabilités : elle signifie que la somme de deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes est encore une variable aléatoire Gaussienne. C'est également cohérent avec le théorème central-limite.

L'un des théorèmes les plus importants de l'analyse de Fourier est celui qui permet d'obtenir l'inverse de la transformée de Fourier :

Théorème : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ également. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Preuve : On calcule (en utilisant le théorème de Fubini)

$$(2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,(x-y)\cdot\xi}\, e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi \right\} dy$$

$$= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}\, \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}}.$$

On fait alors tendre ε vers 0.
Grâce au théorème de convergence dominée, on voit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, e^{-\varepsilon\frac{|\xi|^2}{2}}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

uniformément pour $x \in \mathbb{R}^N$.
D'autre part, lorsque f est continue et bornée, on remarque que

$$(2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}\, \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}}$$

$$= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x - \sqrt{\varepsilon}\, z)\, e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, dz.$$

Mais pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $f(x - \sqrt{\varepsilon}\, z) \to f(x)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ car f est continue, et

$$|f(x - \sqrt{\varepsilon}\, z)|\, e^{-\frac{|z|^2}{2}} \leq ||f||_\infty\, e^{-\frac{|z|^2}{2}},$$

cette dernière fonction étant intégrable, donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}} = f(x).$$

Comme de plus

$$\left| (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}} - f(x) \right| \leq 2\,||f||_\infty,$$

la convergence à lieu dans $L^1(B(0,R))$ pour tout $R > 0$.
On conclut par un argument de densité. On sait que les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ peuvent être approchées (dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) par des fonctions continues à support compact. On en déduit que lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}} \frac{dy}{\varepsilon^{N/2}} = f(x)$$

dans $L^1(B(0,R))$ pour tout $R > 0$. On a donc l'égalité demandée pour presque tout x.

Corollaire : La transformée de Fourier de $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\xi \mapsto \pi e^{-|\xi|}$.

Remarque : On voit que les opérations qui consistent, pour une fonction f donnée, à prendre sa transformée de Fourier $\hat{f}$, puis à la multiplier par une certaine fonction χ, et enfin à en prendre la transformée de Fourier inverse, sont en fait des convolutions.

Ainsi si $\chi(\xi) = 1_{[-a,a]}(\xi)$ (on coupe les hautes fréquences), alors cela revient à convoler par l'inverse de la transformée de Fourier de χ, c'est-à-dire par la fonction $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{\pi x}$. Attention néanmoins, cette dernière fonction n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

1.11 Exercices

1. *Preuve du théorème de convergence dominée.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telle que pour presque tout $x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$. On suppose de plus que pour presque tout $x \in A$, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$, avec $\int_A g < +\infty$.

1. Montrer que l'on peut remplacer les termes "pour presque tout $x \in A$" dans les hypothèses précédentes par les termes "pour tout $x \in A$".

Dans la suite, on se place donc dans le cadre de cette dernière hypothèse.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $A \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$p_n(x) = \sup_{k\geq n} |f_k(x) - f(x)|$$

est décroissante, tend vers 0 en tout point de A et vérifie

$$\forall x \in A, \qquad |p_n(x)| \leq 2\, g(x).$$

3. Conclure en appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(2\, g - p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Utilisation du théorème de Fubini pour l'intégrale semi-convergente du sinus cardinal.*

1. Montrer que pour $A > 0$, $t > 0$,

$$\int_0^A e^{-x\,t} \sin x\, dx = \frac{1 - (\cos A + t\, \sin A)\, e^{-t\,A}}{1+t^2}.$$

2. Montrer que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\cos A + t\, \sin A)\, e^{-t\,A}}{1+t^2}\, dt = 0.$$

3. En déduire par utilisation du théorème de Fubini que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

3. *Le calcul du volume de la boule en dimension N.* On définit les coordonnées sphériques en dimension N par les formules

$$\begin{array}{lcr}
x_1 & = & r\, \cos\theta_1, \\
x_2 & = & r\, \sin\theta_1\, \cos\theta_2 \\
x_3 & = & r\, \sin\theta_1\, \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\
.. & = & .. \\
x_{N-1} & = & r\, \sin\theta_1\, \sin\theta_2 .. \sin\theta_{N-2} \cos\theta_{N-1} \\
x_N & = & r\, \sin\theta_1\, \sin\theta_2 .. \sin\theta_{N-2} \sin\theta_{N-1}
\end{array}$$

où $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta_1, .., \theta_{N-2} \in [0, \pi]$ et $\theta_{N-1} \in [0, 2\pi]$.

On note $J_N(r, \theta_1, .., \theta_{N-1})$ le déterminant Jacobien de ce changement de variable.

1. Montrer que $J_N(r, \theta_1, .., \theta_{N-1}) = r^{N-1}\, J_N(1, \theta_1, .., \theta_{N-1})$.

On note $|S^{N-1}| = \int_{\theta_1,..\theta_{N-2}\in[0,\pi],\theta_{N-1}\in[0,2\pi]} J_N(1, \theta_1, .., \theta_{N-1})$. Cette quantité est le "volume $N-1$-dimensionnel" de la sphère $N-1$-dimensionnelle.

2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(x_1^2+...+x_N^2)/2} dx_1..dx_N = (2\pi)^{N/2}.$$

3. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(x_1^2+...+x_N^2)/2} dx_1..dx_N = |S^{N-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2}\, r^{N-1}\, dr.$$

4. En déduire que

$$|S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)},$$

et que le volume de la boule unité $B(0,1)$ en dimension N est

$$\int_{B(0,1)} 1 = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}.$$

4. *Solution de l'équation de transport.* Donner une formule pour la solution de l'équation de transport

$$\partial_t f(t,x) + \partial_x f(t,x) = g(t,x), \qquad f(0,x) = f_0(x).$$

On pourra introduire la variable $y = t + x$.

5. *Associativité de la convolution.* Montrer que pour $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

6. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-|x|}$.

1. Montrer que $(f * f)(x) = (1 + |x|)\, e^{-|x|}$.

2. Calculer la transformée de Fourier de $f*f$. En déduire que la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est la fonction $\xi \mapsto \frac{\pi}{2}(1+|\xi|)\, e^{-|\xi|}$.

7. *Etude de la fonction* Γ. On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x+1) = x\, \Gamma(x).$$

2. On admet que (pour $x \in]0,1[$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha^{-x}}{1+\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\, x)}.$$

(cette formule sera démontrée dans le chapitre consacré aux fonctions de la variable complexe). Montrer la formule des compléments :

$$\Gamma(x)\, \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\, x)}.$$

On observera que

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\, \Gamma(1-x) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-s}\, s^{x-1}\, e^{-t}\, t^{-x}\, dt ds \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)\, s}\, \alpha^{-x}\, d\alpha ds\end{aligned}$$

grâce au changement de variable $t = \alpha\, s$.

3. En déduire que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, puis que (pour $n \in \mathbb{N}$), $\Gamma(1/2+n) = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}$.

4. Pour tout $x, y > 0$, on pose

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\, (1-t)^{y-1}\, dt.$$

Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a

$$\Gamma(x+y)\, B(x,y) = \Gamma(x)\, \Gamma(y).$$

On montrera que

$$\Gamma(x+y)\,B(x,y) = \int_{t=0}^{1}\int_{s=0}^{+\infty} e^{-st}\,(st)^{x-1}\,e^{-s(1-t)}\,(s(1-t))^{y-1}\,s\,dsdt$$

et on utilisera le changement de variable

$$u = s\,t, \qquad v = s\,(1-t).$$

8. *Etude des fonctions de Bessel.* On rappelle que la fonction J_n (pour $n \in \mathbb{Z}$) est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$J_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{i\,x\,\sin\theta - i\,n\,\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

1. Montrer que la fonction J_n admet le développement en série entière

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r\,x^{2r}}{r!\,(n+r)!\,2^{2r}}.$$

On utilisera le théorème de convergence dominée pour obtenir l'égalité

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(ix)^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{-in\,\theta}(\sin\theta)^m\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(ix)^m}{m!}\,\frac{1}{(2i)^m}\,\frac{(-1)^{(m-n)/2}\,m!}{(\frac{m+n}{2})!\,(\frac{m-n}{2})!}.$$

2. Montrer que (pour $n \in \mathbb{Z}$) la fonction J_n est solution de l'équation différentielle

$$J_n''(x) + \frac{1}{x}\,J_n'(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2})\,J_n(x) = 0.$$

On observera que

$$2\,J_n' = J_{n-1} - J_{n+1},$$

puis, en utilisant une intégration par partie, que

$$2\,\frac{n}{x}\,J_n = J_{n-1} + J_{n+1}.$$

9. *Lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale des fonctions réglées.* Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On rappelle qu'alors f est uniformément continue : pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On appelle fonctions en escalier les fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, 1_{I_i}$ où les I_i sont des intervalles disjoints dont la réunion forme l'intervalle $[a, b]$, et où les λ_i sont des réels.

1. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier (utiliser la continuité uniforme de f).

2. Montrer que si g est une fonction en escalier sur $[a, b]$, il y a identité entre l'intégrale de Lebesgue de g sur $[a, b]$ et l'intégrale "usuelle" de g sur $[a, b]$.

3. On rappelle qu'on définit l'intégrale "usuelle" d'une fonction continue comme la limite des intégrales $\int_a^b f_n(t)\, dt$ d'une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que cette définition est cohérente (il s'agit de montrer que si deux telles suites existent, leurs intégrales convergent toujours et vers une même limite).

4. Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que l'intégrale de Lebesgue de f sur $[a, b]$ est égale à l'intégrale "usuelle" de f sur $[a, b]$.

10. *Lien entre l'intégrale de Lebesgue et les intégrales impropres.* Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$ (pour $a \in \mathbb{R}$).

1. En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer qu'il y a convergence de l'intégrale impropre (i.-e. la quantité $\lim_{x\to+\infty} \int_{[a,x]} f$ à une limite finie) si et seulement si l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,+\infty[} f$ est finie. Montrer de plus que dans ce cas, on a égalité entre l'intégrale de f au sens de Lebesgue sur $[a, +\infty[$ et l'intégrale impropre (i.e. $\lim_{x\to+\infty} \int_{[a,x]} f$).

2. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer qu'il y a convergence **absolue** de l'intégrale impropre (i.-e. la quantité $\lim_{x\to+\infty} \int_{[a,x]} |f|$ à une limite finie) si et seulement si l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a,+\infty[} |f|$ est finie. Montrer de plus que dans ce cas, on a égalité entre l'intégrale de f au sens de Lebesgue sur $[a, +\infty[$ et l'intégrale impropre (i.e. $\lim_{x\to+\infty} \int_{[a,x]} f$).

3. Montrer que les deux résultats précédents sont encore valables pour des fonctions continues sur des intervalles semi-ouverts $[a, b[$ (avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

4. Montrer (en utilisant une intégration par parties) que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin t}{t}\, dt$$

existe mais que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable (au sens de Lebesgue) sur $[0, +\infty[$.

11. *Comportement à l'infini des transformées de Fourier.* On admet le résultat de l'exercice 9 (question 1). On rappelle également que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la norme de $L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les fonctions en escalier à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la norme de $L^1(\mathbb{R})$.

2. Montrer que la transformée de Fourier d'une fonction en escalier tend vers 0 à l'infini. En déduire que la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 à l'infini.

12. *Existence de fonctions C^∞ à support compact.*

1. Montrer que la fonction $f : x \in]-1, 1[\mapsto \exp(-\frac{1}{1-x^2})$ et qui vaut 0 sur $\mathbb{R} - \{x, |x| \geq 1\}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Montrer que sa dérivée k-ième est de la forme

$$f^{(k)}(x) = Q_k(x) \exp\left(- \frac{1}{1-x^2} \right),$$

où Q_k est une fraction rationnelle dont les seuls pôles sont en -1 et 1.

2. Montrer que f est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et paire. Montrer que $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(|x|)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ positive, nulle en dehors de la boule $B(0, 1)$. Fabriquer une fonction ayant les mêmes propriétés et étant de plus d'intégrale 1.

13. *Transformée de Fourier des fonctions radiales en dimension* 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, radiale (i.-e. ne dépendant que de $x^2 + y^2$). On écrit $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que $\hat{f}$ est encore une fonction radiale, et que si $\hat{f}(\xi, \eta) = h(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$, alors

$$h(s) = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} J_0(r\, s)\, r\, g(r)\, dr$$

pour $s > 0$.

14. *Quelques preuves de cas particuliers du théorème de changement de variable.*

1. Soit f continue sur $[a', b']$ dans $\mathbb{R}$ et ϕ croissante strictement et de classe C^1 de $[a, b]$ dans $[a', b']$. Montrer que

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\, dt = \int_a^b f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt.$$

On pourra dériver les fonctions $x \mapsto \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(t)\, dt$ et $x \mapsto \int_a^x f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt$.

2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a\,d - b\,c \neq 0$. Montrer que pour f continue sur $\mathbb{R}^2$ et nulle en dehors d'un borné,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(m, n)\, dmdn = |a\,d - b\,c| \int_{\mathbb{R}^2} f(a\,x + b\,y, c\,x + d\,y)\, dxdy.$$

On pourra commencer par le cas où $a \neq 0$, et poser $m = a\,x + b\,y$ pour commencer par appliquer la partie 1. de l'exercice.

2 L'analyse vectorielle (formes différentielles)

Le matériel de ce chapitre est tiré des livres de H. Cartan : "Formes différentielles", et de H. Flanders : "Differential forms with applications to the physical sciences". Dans ces deux livres sont exposés la théorie rigoureuse des formes différentielles et une preuve complète de la formule de Stokes générale y est présentée.

2.1 Les opérateurs classiques de dérivation

Définition : Pour U ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on pose $\nabla f = (\partial_1 f, .., \partial_N f)$. Lorsque $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, on peut encore utiliser cette notation, mais ∇f devient alors une matrice.

Exemple : Dans un fluide, on note $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ des vitesses. La notation $(u \cdot \nabla)u$ est utilisée pour désigner le terme de convection dans les équations d'Euler ou de Navier-Stokes incompressibles : c'est le vecteur de composantes $\sum_{j=1}^3 u_j \, \partial_j u_i$.

Définition : Pour $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on pose $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + .. + \partial_N f_N$.

Exemple : Les champs qui préservent le volume sont de divergence nulle (cela est montré en exercice) : par exemple le champ des vitesses dans un fluide incompressible.

Définition : Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1, on pose $\operatorname{rot} f = \nabla \wedge f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$. En anglais, on utilise le terme curl au lieu de rot.

Remarque : On définit parfois le rotationnel d'un champ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ comme la matrice antisymétrique de taille N de terme général $(\partial_i f_j - \partial_j f_i)_{ij}$. L'ensemble des matrices antisymétriques de taille N étant un espace vectoriel de dimension $N(N-1)/2$, on identifie le rotationnel d'un champ 2-dimensionnel avec un réel $\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$. De même, on identifie le rotationnel d'un champ 3-dimensionnel avec un vecteur de $\mathbb{R}^3$: c'est précisément le rotationnel défini précédemment.

Remarque : L'interprétation en termes de formes différentielles : On appelle forme différentielle de degré p ($p \in \mathbb{N}_*$) sur $\mathbb{R}^N$ une expression de la forme

$$\omega = \sum_{i_1,..,i_p} a_{i_1,..,i_p}\, dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p},$$

dans laquelle on impose $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ (de manière précise, on impose pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$, $dx_{\sigma(i_1)} \wedge .. \wedge dx_{\sigma(i_p)} = \varepsilon(\sigma)\, dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p}$). On peut alors écrire

$$\omega = \sum_{i_1 < .. < i_p} a_{i_1,..,i_p}\, dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p},$$

et on définit une forme de degré $p+1$ par la formule

$$d\omega = \sum_{i_1 < .. < i_p} da_{i_1,..,i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge .. \wedge dx_{i_p},$$

où $da_{i_1,..,i_p}$ est donnée par la formule traditionnelle

$$da_{i_1,..,i_p} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{i_1,..,i_p}}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Par convention, les formes de degré 0 sont simplement les fonctions.

On s'intéresse à la dimension 3.
On considère tout d'abord une forme de degré 0 (i-e. une fonction A), on a alors

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial A}{\partial x_3}\, dx_3,$$

on retrouve ainsi les composantes du gradient de A.
On considère ensuite une forme de degré 1

$$\omega = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3,$$

on a

$$d\omega = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,$$

et les différentes composantes sont (au signe près) celles du rotationnel de A.
Enfin on considère une forme de degré 2

$$\omega = B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

On a

$$d\omega = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

et l'unique composante cette fois-ci est la divergence de B.

2.2 Le lemme de Poincaré

Proposition : Les champs de gradient (d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) de classe C^1 (c'est-à-dire ceux de la forme $\nabla\phi$, avec $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2) ont un rotationnel nul. Les champs de rotationnel (d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) de classe C^1 (c'est-à-dire ceux de la forme $\mathrm{rot} A$, avec $A : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2) sont de divergence nulle.

Preuve : Les deux propriétés sont conséquences du lemme de Schwarz : pour toute fonction f de classe C^2 d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et tout $i, j = 1..N$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j} = \frac{\partial^2 f}{\partial j \partial i}\,.$$

Remarque : Ces deux propriétés sont des cas particuliers de la même formule $d(d\omega) = 0$, valable en fait pour toute forme différentielle ω (de classe C^2).

Les différentes versions du lemme de Poincaré permettent de donner des réciproques à la proposition précédente.

Théorème : Les champs (de classe C^1) à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^N$ sont les champs de gradient.

Preuve : On suppose que $u = u_1(x_1, x_2, .., x_N), u_2(x_1, x_2, .., x_N), .., u_N(x_1, x_2, .., x_N)$ et vérifie pour tout $i, j = 1..N$

$$\partial_i u_j = \partial_j u_i,$$

c'est-à-dire que son rotationnel est nul.

On pose alors

$$f(x_1, x_2, .., x_N) = \int_0^1 \Big(x_1\, u_1(t\, x_1, t\, x_2, ..t\, x_N) + x_2\, u_2(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) +$$

$$+ .. + x_N\, u_N(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \Big)\, dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1, x_2, .., x_N) &= \int_0^1 \Big(u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) + t\, x_1\, \partial_1 u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \\
&\qquad + t \sum_{j=2}^{N} x_j\, \partial_1 u_j(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \Big(u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) + t\, x_1\, \partial_1 u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \\
&\qquad + t \sum_{j=2}^{N} x_j\, \partial_j u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \Big(u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) + t\, \frac{d}{dt}\Big[u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \Big] \Big) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big[t\, u_1(t\, x_1, t\, x_2, .., t\, x_N) \Big]\, dt \\
&= u_1(x_1, x_2, .., x_N).
\end{aligned}$$

On montre de la même manière que $\partial_i f = u_i$ pour $i > 1$. On en déduit que u est le gradient de f.

Remarque : On voit immédiatement que ce théorème reste vrai lorsque l'espace $\mathbb{R}^N$ est remplacé par n'importe quel ouvert U vérifiant la propriété : Pour tout $x \in U$, le segment $[0, x]$ est inclus dans U. Un tel ouvert est dit étoilé par rapport à 0. Une très légère modification de la démonstration montre que le théorème reste vrai dès que U est étoilé par rapport à l'un de ses points (notons qu'en particulier le résultat reste vrai pour tout ouvert U convexe : en effet les ensembles convexes sont exactement ceux qui sont étoilés par rapport à chacuns de leurs points). On trouvera en exercice un contre-exemple dans le cas de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Exemple : En électrostatique, le champ électrique E est à rotationnel nul. C'est donc un champ de gradient. Ainsi, si $E(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_3, x_2)$, on a $E = -\nabla V$, et $V(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2\, x_3$.

Théorème : Les champs (de classe C^1) à divergence nulle sur $\mathbb{R}^3$ sont les champs de rotationnel.

Preuve : On suppose que $u = u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)$ vérifie

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0.$$

On pose alors

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \int_0^1 t\, u_2(t\, x_1, t\, x_2, t\, x_3)\, dt - x_2 \int_0^1 t\, u_3(t\, x_1, t\, x_2, t\, x_3)\, dt,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \int_0^1 t\, u_3(t\, x_1, t\, x_2, t\, x_3)\, dt - x_3 \int_0^1 t\, u_1(t\, x_1, t\, x_2, t\, x_3)\, dt,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 \int_0^1 t\, u_1(t\, x_1, t\, x_2, t\, x_3)\, dt - x_1 \int_0^1 t\, u_2(t\, x_1, t\, x_2, t\, x_3)\, dt.$$

On montre que $\nabla \wedge f = u$. Pour cela, on calcule par exemple

$$(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 t\, u_1(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt + x_2 \int_0^1 t^2\, \partial_2 u_1(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt$$

$$-x_1 \int_0^1 t^2\, \partial_2 u_2(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt - x_1 \int_0^1 t^2\, \partial_3 u_3(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt$$

$$+ \int_0^1 t\, u_1(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt + x_3 \int_0^1 t^2\, \partial_3 u_1(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt$$

$$= \int_0^1 (2t\, u_1 + t^2\, [x_1 \partial_1 u_1 + x_2 \partial_2 u_1 + x_3 \partial_3 u_1])(tx_1, tx_2, tx_3)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^2\, u_1(tx_1, tx_2, tx_3)]\, dt$$

$$= u_1(x_1, x_2, x_3).$$

Exemple : En électromagnétisme, l'équation $\mathrm{div}_x B = 0$ implique que B est un rotationnel : $B = \mathrm{rot}_x A$, où A est par définition un potentiel-vecteur. Ainsi, si $B = (x_1\, x_3, x_2, -x_3 - \frac{1}{2} x_3^2)$, on voit que l'on peut prendre

$$A_1 = x_3 \int_0^1 t\, (tx_2)\, dt - x_2 \int_0^1 t\, (-tx_3 - \frac{1}{2} t^2 x_3^2)\, dt$$

$$= \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{1}{8}x_2x_3^2,$$

$$A_2 = x_1 \int_0^1 t\,(-tx_3 - \frac{1}{2}t^2x_3^2)\,dt - x_3 \int_0^1 t\,(t^2x_1x_3)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}x_1x_3 - \frac{3}{8}x_1x_3^2,$$

$$A_3 = x_2 \int_0^1 t\,(t^2x_1x_3)\,dt - x_1 \int_0^1 t\,(tx_2)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}x_1x_2x_3 - \frac{1}{3}x_1x_2.$$

Remarque : Les mêmes remarques sur les ouverts sur lesquels cette proposition reste vraie peuvent être faîtes que pour la proposition précédente. Par contre, il y a une différence essentielle, expliquée dans la proposition suivante.

Proposition : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (de classe C^1) de rotationnel nul. Alors si $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont tels que $\nabla\phi_1 = \nabla\phi_2 = f$, il existe une constante C telle que $\phi_1 = \phi_2 + C$.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (de classe C^1) de divergence nulle. Alors si $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sont tels que $\mathrm{rot}\phi_1 = \mathrm{rot}\phi_2 = f$, il existe $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de classe C^2) tel que $\phi_1 = \phi_2 + \nabla\psi$.

Preuve : Dans le premier cas, on a $\nabla(\phi_1 - \phi_2) = 0$. On en déduit que $\phi_1 - \phi_2$ est constante.

Dans le second cas, on a $\mathrm{rot}(\phi_1 - \phi_2) = 0$. On en déduit que $\phi_1 - \phi_2$ est un gradient (1ère proposition du paragraphe).

Remarque : Les deux propositions de ce paragraphe sont deux versions d'un même lemme sur les formes différentielles, qui exprime que si une forme différentielle ω vérifie $d\omega = 0$ (sur tout l'espace), alors il existe une autre forme différentielle ϕ telle que $\omega = d\phi$. On dit que dans tout l'espace, les formes fermées (i.-e. les ω telles que $d\omega = 0$) sont exactes (elles sont de la forme $d\phi$).

2.3 Intégrales curvilignes et de surface

Définition : On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^N$ une application γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. On appelle image de l'arc paramétré le sous-ensemble $\gamma(I)$ de $\mathbb{R}^N$.

Exemple : $t \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos t, 2\sin t)$ définit une ellipse dans $\mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ définit une hélice dans $\mathbb{R}^3$.

Définition : On appelle changement de paramètre (de classe C^1) une bijection $\phi : J \to I$ de classe C^1 entre les intervalles J et I et qui vérifie $\phi' \neq 0$. Deux arcs paramétrés sont dits équivalents lorsqu'ils se déduisent l'un de l'autre par changement de paramètre.

Remarque : L'image de deux arcs équivalents est la même.

Définition : Soit $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^N$ $(a < b)$ un arc paramétré et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue. On définit l'intégrale curviligne de f sur γ par

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Proposition : L'intégrale curviligne le long de deux arcs équivalents est identique.

Preuve : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ et $\phi : J \to I$ de classe C^1 un changement de paramètre (supposé ici croissant). Alors pour $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (continue)

$$\int_{\gamma o \phi} f = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f((\gamma o \phi)(u))\,|(\gamma o \phi)'(u)|\,du$$

$$= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\gamma(\phi(u)))\,|\gamma'(\phi(u))|\,|\phi'(u)|\,du$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt,$$

grâce au changement de variable $t = \phi(u)$ dans l'intégrale. Enfin on remarque qu'un changement d'orientation laisse l'intégrale curviligne invariante.

Remarque : On rappelle que la circulation d'un champ de vecteurs E le long de γ est définie par la formule

$$\int_\gamma E = \int_a^b \sum_{i=1}^N E_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,dt.$$

On voit que cette quantité n'est autre que l'intégrale curviligne de $E \cdot \tau$, où τ est la tangente à γ. Par changement d'orientation, on voit que τ est changée en son opposée, donc la circulation est changée en son opposée.

Exemple : L'intégrale curviligne de la fonction constante égale à 1 définit l'abscisse curviligne.

Définition : On appelle nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ la donnée d'une fonction x d'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On appelle image de la nappe paramétrée le sous-ensemble $x(U)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exemple : L'application $(t, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\mapsto (t^2, t\cos\theta, t\sin\theta)$ définit un paraboloïde de révolution. Attention, la source n'est pas un ouvert ici.

Définition : On appelle changement de paramètre(s) (de classe C^1) une bijection $\phi : V \to U$ de classe C^1 entre les sous-ensembles V et U de $\mathbb{R}^2$ et qui vérifie $Det(\nabla\phi) \neq 0$ (i.-e. le déterminant Jacobien de ϕ ne s'annulle pas). Deux nappes paramétrées sont dites équivalentes lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par changement de paramètre.

Remarque : L'image de deux nappes équivalentes est la même.

Définition : Soit $x = (x_1, x_2, x_3) : U \to \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue. On définit l'intégrale de surface de f sur x par

$$\int_x f = \int_U f(x(u,v))\, |\partial_1 x(u,v) \wedge \partial_2 x(u,v)|\, dudv.$$

Proposition : L'intégrale de surface de deux nappes équivalentes est identique.

Preuve : On suppose que (pour $(s,t) \in V$),

$$u = \phi_1(s,t), \qquad v = \phi_2(s,t).$$

On a (en considérant l'addition modulo 3 pour l'indice i)

$$\int_x f = \int_U f(x(u,v))\, |\partial_1 x(u,v) \wedge \partial_2 x(u,v)|\, dudv$$

$$= \int_V f((xo\phi)(s,t)) \left(\sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial x_i}{\partial u} o\phi\, \frac{\partial x_{i+1}}{\partial v} o\phi - \frac{\partial x_{i+1}}{\partial u} o\phi\, \frac{\partial x_i}{\partial v} o\phi \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\times\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial s}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}-\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\right|dsdt.$$

On observe alors que

$$\left|\frac{\partial(x_i o\phi)}{\partial s}\frac{\partial(x_{i+1} o\phi)}{\partial t}-\frac{\partial(x_{i+1} o\phi)}{\partial s}\frac{\partial(x_i o\phi)}{\partial t}\right|$$

$$=\Bigg|\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}o\phi\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial s}+\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}o\phi\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\right]\left[\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}o\phi\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}o\phi\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}o\phi\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial s}+\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}o\phi\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\right]\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}o\phi\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}o\phi\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial t}\right]\Bigg|$$

$$=\Bigg|\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}o\phi\right)\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}o\phi\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial s}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}+\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}o\phi\right)\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}o\phi\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}$$

$$-\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}o\phi\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}o\phi\right)\frac{\partial\phi_1}{\partial s}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}-\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}o\phi\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}o\phi\right)\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\Bigg|$$

$$=\left|\frac{\partial x_i}{\partial u}o\phi\,\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}o\phi-\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}o\phi\,\frac{\partial x_i}{\partial v}o\phi\right|\times\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial s}\frac{\partial\phi_2}{\partial t}-\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\frac{\partial\phi_2}{\partial s}\right|.$$

Remarque : On rappelle qu'on définit le flux d'un champ E à travers une surface (définie par) x par la quantité

$$\pm\int_U E(x(u,v))\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\wedge\frac{\partial x}{\partial v}\right)dudv.$$

C'est aussi ($\pm$) l'intégrale de surface de $E\cdot n$, où n est la normale à la surface.

Exemple : l'intégrale de surface de la fonction constante égale à 1 définit l'aire de la surface.

2.4 Différentes formules de Stokes

On commence par les formules qui interviennent dans les formulations variationnelles des problèmes aux limites (équation de Laplace ou de la chaleur dans des domaines bornés, etc.)

Proposition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) dont la frontière $\partial\Omega$ est un arc paramétré (resp. une nappe paramétrée). On note n la normale extérieure à Ω en un point de $\partial\Omega$. Alors pour toute fonction f de classe C^1 sur Ω, on a

$$\int_\Omega \partial_i f = \int_{\partial\Omega} f\, n_i. \tag{1}$$

Attention : dans cette formule, la seconde intégrale est une intégrale curviligne ou de surface.

Preuve : On la fait en dimension 2 pour $i = 2$ et

$$\Omega = \{(x,y), \quad x \in]x_1, x_2[, y \in]\beta(x), \alpha(x)[\},$$

où β, α sont des applications de classe C^1 telles que $\alpha(x_1) = \beta(x_1)$, $\alpha(x_2) = \beta(x_2)$.

On a

$$\int_\Omega \partial_2 f = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} \partial_2 f(x,y)\, dydx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \Big[f(x, \alpha(x)) - f(x, \beta(x)) \Big]\, dx,$$

et d'autre part,

$$\int_{\partial\Omega} f\, n_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\alpha(x))\, 1\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x, \beta(x))\, (-1)\, dx.$$

On la fait ensuite en dimension 3 pour $i = 3$ et

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3)/ \quad (x_1, x_2) \in U, x_3 \in]\beta(x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2)[\}.$$

En un point $(x_1, x_2, \alpha(x_1, x_2))$ de $\partial\Omega$, on a

$$n = \Big(1 + (\partial_1\alpha)^2 + (\partial_2\alpha)^2\Big)^{-1/2} \begin{pmatrix} -\partial_1\alpha \\ -\partial_2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\int_\Omega \partial_3 f = \int_U \int_{\beta(x_1,x_2)}^{\alpha(x_1,x_2)} \partial_3 f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 dx_2 dx_1$$
$$= \int_U \Big[f(x_1, x_2, \alpha(x_1, x_2)) - f(x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) \Big] dx_1 dx_2,$$

et d'autre part,

$$\int_{\partial\Omega} f\, n_3 = \int_U f(x_1,x_2,\alpha(x_1,x_2))\, 1\, dx_1 dx_2$$
$$+ \int_U f(x_1,x_2,\beta(x_1,x_2))\, (-1)\, dx_1 dx_2.$$

Toutes les formules que l'on va maintenant écrire sont des cas particuliers d'une formule générale dite "de Stokes" que l'on peut écrire sous la forme

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega,$$

où Ω est de dimension N, $\partial\Omega$ est sa frontière (de dimension $N-1$) et ω est une forme différentielle de degré $N-1$. On ne précise pas dans ce cours quelle est la définition mathématique de l'intégrale d'une forme différentielle de degré k sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$ (et encore moins sur une variété de dimension k). On pourra néanmoins s'en faire une idée à travers les exemples en dimension 0, 1, 2 et 3 présentés.

1. On commence par le cas où ω est une forme de degré 0 (i-e. une fonction, notée f, supposée de classe C^1).

   Lorsque Ω est l'intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, on obtient simplement la formule

   $$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a).$$

   Lorsque $\Omega = \gamma(]a,b[)$, courbe de dimension 1 dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), on observe que

   $$\int_a^b \left\{ \gamma_1'(t)\, \frac{\partial f}{\partial 1}(\gamma(t)) + \gamma_2'(t)\, \frac{\partial f}{\partial 2}(\gamma(t)) \right\} dt$$
   $$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{ f(\gamma(t)) \right\} dt$$
   $$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

   Ceci se traduit en disant que la circulation du gradient d'un champ scalaire est égale à la valeur du champs au point final de la courbe moins sa valeur au point initial.

2. On considère maintenant le cas où ω est une forme de degré 1.

   Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont le bord $\partial\Omega$ est le support d'un arc paramétré $\gamma : t \in [a, b[\mapsto (x(t), y(t))$, orienté dans le sens direct, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_a^b \Big(P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\Big)\, dt.$$

   Cette formule s'obtient facilement à partir de la formule (1) en remarquant que $n = (y', -x')/|(y', -x')|$. Cette formule est dite de Green-Riemann (elle correspond à prendre $\omega = P\,dx + Q\,dy$, ce qui implique $d\omega = \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy\right)$).

   Lorsque Ω est l'image d'une nappe paramétrée (de normale n)

   $x : (u, v) \in U \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ dont la frontière $\partial\Omega$ est le support d'un arc paramétré (de tangente τ)

   $\gamma : t \in [a, b[\mapsto (x_1(u(t), v(t)), x_2(u(t), v(t)), x_3(u(t), v(t)))$ orienté de manière "compatible" avec n, on a

$$\int_x \operatorname{rot} A \cdot n = \int_\gamma A \cdot \tau.$$

   En d'autres termes, le flux du rotationnel de A à travers Ω est égal à la circulation de A le long de $\partial\Omega$. La preuve de cette formule est faite (au signe près) en exercice.

3. On considère finalement le cas où ω est une forme de degré 2.

   Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est l'image d'une nappe paramétrée $x : (u, v) \in U \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ (on note n la normale extérieure à Ω en un point de $\partial\Omega$), et lorsque A est un champ de classe C^1,

$$\int_\Omega \operatorname{div} A = \int_x A \cdot n.$$

   Cette formule, conséquence immédiate de (1), est dite d'Ostrogradsky (elle correspond à prendre $\omega = A_1\, dy \wedge dz + A_2\, dz \wedge dx + A_3\, dx \wedge dy$, ce qui implique $d\omega = (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3)\, dx \wedge dy \wedge dz$). Elle permet de calculer un flux à travers une surface.

2.5 Exercices

1. On rappelle l'équation de Navier-Stokes incompressible pour un champ de vitesse $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et de pression $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dépendant du temps t (en prenant un système d'unités pour lequel la densité du fluide vaut $\rho = 1$ et sa viscosité vaut $\nu = 1$) :

$$\mathrm{div}_x u = 0,$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u + \nabla_x p = \Delta_x u.$$

1. On pose $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$. Montrer que la vorticité ω vérifie l'équation

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla_x)\omega = \Delta_x \omega.$$

2. Grace à quelle équation peut-on retrouver u à partir de ω ?

2. *La forme contractée des équations de Maxwell dans le vide.* On se place dans un système d'unités où $c = 1$. On se propose de construire des formes différentielles de degré 2 sur l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ à partir des champs électriques et magnétiques. On note x_1, x_2, x_3, t les coordonnées de l'espace-temps.

1. On pose

$$\alpha = E_1\, dx_1 \wedge dt + E_2\, dx_2 \wedge dt + E_3\, dx_3 \wedge dt$$

$$+ B_1\, dx_2 \wedge dx_3 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1 + B_3\, dx_1 \wedge dx_2,$$

$$\beta = -B_1\, dx_1 \wedge dt - B_2\, dx_2 \wedge dt - B_3\, dx_3 \wedge dt$$

$$+ E_1\, dx_2 \wedge dx_3 + E_2\, dx_3 \wedge dx_1 + E_3\, dx_1 \wedge dx_2.$$

Montrer que les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = 0.$$

2. On appelle opérateur de Hodge l'application $*$ des formes différentielles de degré 2 sur $\mathbb{R}^4$ vers elles-mêmes définie par

$$*(dx_i \wedge dt) = dx_{i+1[mod3]} \wedge dx_{i+2[mod3]},$$

$$*(dx_i \wedge dx_{i+1[mod3]}) = -\, dx_{i+2[mod3]} \wedge dt.$$

Montrer que les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$d\alpha = 0, \qquad d(*\alpha) = 0.$$

3. *Champs préservant le volume.* On considère le système différentiel $x'(t) = \phi(x(t))$, où $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est supposée régulière (de classe C^1). On définit le flot associé à ce système par le problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}T^t(y) = \phi(T^t(y)), \qquad T^0(y) = y.$$

1. Montrer que (en définissant le premier et le troisième signe ∇ comme le gradient par rapport à y)

$$\frac{d}{dt}\nabla T^t(y) = \nabla\phi(T^t(y))\,\nabla T^t(y).$$

Le produit dans le membre de droite est un produit matriciel.

2. On suppose que pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, la mesure de $T^t(A)$ ne dépend pas de t.
Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} 1_A(y)\,\frac{d}{dt}Det(\nabla T^t)(y)\,dy = 0.$$

En déduire que (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^N$), $\frac{d}{dt}Det(\nabla T^t)(y) = 0$.

3. Montrer que (pour tout $y \in \mathbb{R}^N$)

$$\begin{aligned} Det(\nabla T^t)(y) &= Det(I + t\,\nabla\phi(y) + o(t)) \\ &= 1 + t\ \mathrm{div}\phi(y) + o(t). \end{aligned}$$

En déduire que $\mathrm{div}\phi = 0$.

4. *Preuve de la formule de Stokes liant le flux du rotationnel d'un champ à travers une surface et la circulation de ce champ sur le bord de la surface*

1. Soit A un champ de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et $x(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ une application (de classe C^1) sur un ouvert U définissant une surface Ω. Dans tout cet exercice, l'indice est à considérer modulo 3.
Montrer que le flux de $\mathrm{rot}A$ à travers Ω est donné par la formule

$$F = \pm\sum_{i=1}^{3}\int_U (\partial_{i+1}A_{i+2} - \partial_{i+2}A_{i+1})(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$$

$$\times\left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}\frac{\partial x_{i+2}}{\partial v}-\frac{\partial x_{i+2}}{\partial u}\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}\right)dudv.$$

2. Montrer que

$$F=\pm\sum_{i=1}^{3}\int_U\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\left[\partial_{i+2}A_i\frac{\partial x_{i+2}}{\partial u}+\partial_{i+1}A_i\frac{\partial x_{i+1}}{\partial u}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial x_i}{\partial u}\left[\partial_{i+2}A_i\frac{\partial x_{i+2}}{\partial v}+\partial_{i+1}A_i\frac{\partial x_{i+1}}{\partial v}\right]\right)dudv.$$

En déduire que

$$F=\pm\sum_{i=1}^{3}\int_U\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{d}{du}(A_i(x_1(u,v),x_2(u,v),x_3(u,v))\right.$$

$$\left.-\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{d}{dv}(A_i(x_1(u,v),x_2(u,v),x_3(u,v))\right)dudv.$$

3. Montrer que

$$F=\pm\sum_{i=1}^{3}\int_U\left(\frac{d}{du}(A_i\frac{\partial x_i}{\partial v})-\frac{d}{dv}(A_i\frac{\partial x_i}{\partial u})\right)dudv.$$

En utilisant la formule de Green-Riemann, en déduire que F est égale à $\pm$ la circulation de A sur le bord $\partial\Omega$ de Ω.

5. *Une forme fermée sur* $\mathbb{R}^2-\{0\}$ *mais non exacte.* Lorsque ω est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^2-\{0\}$, $\omega=\omega_1\,dx+\omega_2\,dy$, avec $\omega_1,\omega_2\in C^1(\mathbb{R}^2-\{0\})$, on pose

$$L\omega=\int_0^{2\pi}\left\{-\omega_1(\cos t,\sin t)\,\sin t+\omega_2(\cos t,\sin t)\,\cos t\right\}dt.$$

1. On considère

$$\omega_0(x,y)=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Calculer $L\omega_0$. On pourra a posteriori remarquer que “formellement”, $\omega_0=d\theta$, où r,θ sont les coordonnées polaires habituelles.

2. Montrer que s'il existe $f\in C^2(\mathbb{R}^2-\{0\})$ telle que $df=\omega$, alors $L\omega=0$. Conclure.

3 Fonctions de la variable complexe

3.1 Définition

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in \Omega$. On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 (de dérivée complexe $f'(z_0)$) lorsque

$$\lim_{h\to 0,(h\neq 0, z_0+h\in\Omega)} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point z_0 de Ω, on dit que f est holomorphe sur Ω et on note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Lorsque $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, on dit que f est entière.

Proposition : On a les mêmes propriétés algébriques avec la dérivation complexe qu'avec la dérivation usuelle:

1. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 de dérivées $f'(z_0)$ et $g'(z_0)$ respectivement, alors $f+g$ et fg sont encore $\mathbb{C}$-dérivables en z_0, de dérivées respectives $f'(z_0)+g'(z_0)$ et $f(z_0)\,g'(z_0)+f'(z_0)\,g(z_0)$.

2. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)$ et si $f(z_0) \neq 0$, alors $1/f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de dérivée $-\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$.

3. Soit Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $g : \Omega' \to \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) \in \Omega'$. Alors si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)$ et si g est $\mathbb{C}$-dérivable en $f(z_0)$ de dérivée $g'(f(z_0))$, la composée $g\,o\,f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)\,g'(f(z_0))$.

Preuve : Les démonstrations sont identiques à celles des propriétés correspondantes dans le cas réel.

Corollaire : Les polynômes et fractions rationnelles se dérivent comme d'habitude. De manière précise, si $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $z \mapsto P(z)$ est entière et sa dérivée complexe est égale à la fonction $z \mapsto P'(z)$, où P' est la dérivée formelle de P. Si $P, Q \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] - \{0\}$, la fonction $z \mapsto P(z)/Q(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - Q^{-1}(\{0\})$ et sa dérivée complexe est égale à la fonction $z \mapsto \frac{P'(z)\,Q(z)-P(z)\,Q'(z)}{Q(z)^2}$, où P', Q' sont les dérivées formelles de P et Q.

Preuve : Il suffit d'utiliser les propriétés algébriques de la $\mathbb{C}$-dérivation et les fonctions $z \mapsto c$ (pour $c \in \mathbb{C}$ donné) et $z \mapsto z$.

Proposition : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ avec $z_0, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$. Alors

1. la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\, a_n\,(z-z_0)^{n-1}$ est encore de rayon de convergence R,
2. la fonction $z \in B(z_0,R) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,(z-z_0)^n$ est holomorphe sur $B(z_0,R)$ et sa dérivée complexe en z est $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\, a_n\,(z-z_0)^{(n-1)}$.

Elle est donc $\mathbb{C}$-dérivable une infinité de fois.

Preuve : On sait que $R_{\sum a_n\,(z-z_0)^n} = \sup\{r\in[0,+\infty[, (a_n\, r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée $\}$. On en déduit que $R_{\sum n\, a_n\,(z-z_0)^{n-1}} \le R_{\sum a_n\,(z-z_0)^n}$ d'une part, et que, pour $\varepsilon>0$ assez petit, $R_{\sum n\, a_n\,(z-z_0)^{n-1}} \ge R_{\sum a_n\,(z-z_0)^n} - \varepsilon$ d'autre part. En effet, on a (toujours pour $\varepsilon>0$ assez petit)

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{R_{\sum a_n\,(z-z_0)^n} - \varepsilon}{R_{\sum a_n\,(z-z_0)^n} - \varepsilon/2} \right)^n = 0.$$

En appliquant l'argument précédent à la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}_*} n\, a_n\,(z-z_0)^{n-1}$, on voit que la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,(z-z_0)^{n-2}$ a encore R pour rayon de convergence.

On remarque alors que pour tout $w,h\in\mathbb{C}$, on a d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2:

$$(w+h)^n - w^n - n\,h\,w^{n-1} = \int_0^1 (1-\theta)\,\frac{d^2}{d\theta^2}(w+\theta\, h)^n\, d\theta,$$

d'où l'inégalité

$$\left|(w+h)^n - w^n - n\,h\,w^{n-1}\right| \le |h|^2\, n\,(n-1)\,(|w|+|h|)^{n-2}.$$

On en déduit le résultat demandé.

Corollaire : La fonction $z\mapsto e^z$ (définie par $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$) est entière, ainsi que les fonctions trigonométriques et hyperboliques qui s'en déduisent:

$$z\mapsto \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad z\mapsto \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$
$$z\mapsto \text{ ch } z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \qquad z\mapsto \text{ sh } z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

Remarque : Attention, les propriétés de type “égalité” de ces fonctions (telles que $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$) se conservent en général pour $z\in\mathbb{C}$, mais pas le plus souvent celles de type “inégalité” (telles que $|\cos z|\le 1$, valable pour $z\in\mathbb{R}$, mais pas pour $z\in\mathbb{C}$).

3.2 Les relations de Cauchy–Riemann

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On note $\tilde{\Omega}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\tilde{\Omega} = \{(x,y)/x+iy \in \Omega\}$. Si f est une application de Ω dans $\mathbb{C}$, on note $\tilde{f}$ l'application de $\tilde{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\tilde{f}(x,y) = (Ref(x+iy), Imf(x+iy))$. Réciproquement, si $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert, on note $U^* \subset \mathbb{C}$ l'ouvert formé par les $\{x+iy/(x,y) \in U\}$, et pour $g=(g_1,g_2)$ application de U dans $\mathbb{R}^2$, on définit $g^* : U^* \to \mathbb{C}$ par $g^*(x+iy) = g_1(x,y) + i\, g_2(x,y)$.

Proposition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $z_0 \in \Omega$. On a équivalence entre les propriétés suivantes:

1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 (de dérivée $f'(z_0)$),
2. $\tilde{f}$ est différentiable en (Rez_0, Imz_0) et sa matrice Jacobienne est une matrice de similitude directe (égale à $\begin{pmatrix} Ref'(z_0) & -Imf'(z_0) \\ Imf'(z_0) & Ref'(z_0) \end{pmatrix}$),
3. $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ est différentiable en (Rez_0, Imz_0) et ses dérivées partielles en ce point vérifient les relations de Cauchy–Riemann
$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 1}(Rez_0, Imz_0) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 2}(Rez_0, Imz_0),$$
$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 2}(Rez_0, Imz_0) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial 1}(Rez_0, Imz_0)$$

(et $f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 1}(Rez_0, Imz_0) + i\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial 2}(Rez_0, Imz_0)$).

Preuve :
$$\begin{aligned} & f(z_0+h) - f(z_0) = f'(z_0)\, h + o(|h|) \\ \iff\ & f(Rez_0 + Reh + i(Imz_0 + Imh)) - f(Rez_0 + i\, Imz_0) \\ & = (Ref'(z_0) + i\, Imf'(z_0))\,(Reh + i\, Imh) + o(|h|) \\ \iff\ & \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(Rez_0 + Reh, Imz_0 + Imh) - \tilde{f}_1(Rez_0, Imz_0) \\ \tilde{f}_2(Rez_0 + Reh, Imz_0 + Imh) - \tilde{f}_2(Rez_0, Imz_0) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} Ref'(z_0) & -Imf'(z_0) \\ Imf'(z_0) & Ref'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Reh \\ Imh \end{pmatrix} + o(|h|). \end{aligned}$$

Exemple : Les fonctions $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|^2$ sont différentiables (en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) mais pas holomorphes sur $\mathbb{C}$ (chercher les points de $\mathbb{C}$-dérivabilité).

Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$, on sait que $x+iy \mapsto P(x+iy)$ est holomorphe. Ce n'est par contre pas le cas en général pour $x+iy \mapsto P_1(x,y)+iP_2(x,y)$, quand $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, $z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors que $|z|^2 = x^2+y^2$ pour $z = x+iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Exemple : La fonction $\log^*$ qui à $x+iy \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_-$ associe

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i \text{ arctan } (y/x) & \text{si} & x>0, \\ \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\frac{\pi}{2} - i \text{ arctan } (x/y) & \text{si} & y>0, \\ \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - i\frac{\pi}{2} - i \text{ arctan } (x/y) & \text{si} & y<0, \end{array}$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$, on l'appelle détermination principale du logarithme. On voit facilement qu'elle est identique au logarithme usuel sur $\mathbb{R}_+^*$.

En coordonnées polaires, (et pour $\theta \in]-\pi, \pi[$), sa valeur est $\log^*(r\, e^{i\theta}) = \log r + i\theta$.

Cette fonction ne peut pas se prolonger continûment sur $\mathbb{C}^*$ car

$$\lim_{y \to 0^+, x \to x_0} \log^*(x+iy) = \lim_{y \to 0^-, x \to x_0} \log^*(x+iy) + 2i\pi$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$.

Attention à l'utilisation des formules telles que $\log^*(e^z) = z$ ou $\log^*(z_1\, z_2) = \log^* z_1 + \log^* z_2$. Elles ont un domaine de validité qui ne recouvre pas entièrement le domaine où chacuns des termes qui les composent peuvent être définis. En pratique, on note souvent log au lieu de $\log^*$. Attention donc aux confusions !

On définit la détermination principale des puissances α-ièmes sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$ par

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Ce sont encore des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$. Elles peuvent se prolonger en fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ si et seulement si $e^{2i\pi\,\alpha} = 1$, i.e. si $\alpha \in \mathbb{Z}$. Elles peuvent se prolonger en fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$ (ce sont alors des polynômes).

Enfin, on peut voir que la fonction

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

est bien définie et holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e z > 0\}$.

3.3 Intégrale le long d'un chemin et applications

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On appelle chemin continu et C^1 par morceaux de Ω une application $\gamma : [a, b] \to \Omega$ continue et C^1 par morceaux. Si de plus $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que le chemin est un lacet.

Définition : Deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, b_1], [a_2, b_2] \to \Omega$ sont dits C^1-équivalents lorsqu'il existe $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijection de classe C^1 ainsi que sa réciproque (i.e. ϕ' ne s'annule pas sur $[a_1, b_1]$) telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \, o \, \phi$. Si de plus on peut choisir ϕ croissante, on dit que les chemins sont C^1-équivalents et de même orientation.

Remarque : Tout chemin est équivalent (de même orientation) à un chemin dont la source est $[0, 1]$. Il suffit de prendre une bijection ϕ affine.

Remarque : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 : [a_1, b_1], [a_2, b_2] \to \Omega$ tels que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. On définit $\gamma_1 \cup \gamma_2$ (parfois noté $\gamma_1 + \gamma_2$): $[a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \Omega$ par

$$t \mapsto \gamma_1(t) \text{ si } t \in [a_1, b_1],$$
$$t \mapsto \gamma_2(t + a_2 - b_1) \text{ si } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2],$$

et $-\gamma_1$: $[a_1, b_1] \to \Omega$ par

$$t \mapsto \gamma_1(b_1 + a_1 - t).$$

On voit tout de suite que si γ_1, γ_2 sont continus et C^1 par morceaux, il en est de même pour $\gamma_1 \cup \gamma_2$ et $-\gamma_1$.

Exemple : Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $t \in [0, 1] \mapsto (1 - t)\, z_1 + t\, z_2$ est un chemin de classe C^1 noté $[z_1, z_2]$. Le cas où $z_1 = z_2$ (lacet réduit à un point) apparaîtra souvent dans la suite.

Lorsque $z_1 = x_1 + i\, y_1, z_2 = x_2 + i\, y_1$, ce chemin est équivalent à $t \in [x_1, x_2] \mapsto t + i\, y_1$. De même, lorsque $z_1 = x_1 + i\, y_1, z_2 = x_1 + i\, y_2$, ce chemin est équivalent à $t \in [y_1, y_2] \mapsto x_1 + i\, t$.

Enfin, lorsque $z_1 = r_1\, e^{i\theta}, z_2 = r_2\, e^{i\theta}$ $(0 \leq r_1 \leq r_2)$, ce chemin est équivalent à $t \in [r_1, r_2] \mapsto t\, e^{i\theta}$.

Exemple : Lorsque $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ on note $C(z_0, r)$ le chemin $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $t \mapsto z_0 + r\, e^{it}$. On utilise aussi souvent des arcs de cercles, définis par la même formule, mais avec un ensemble source différent.

Définition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue, et $\gamma : [a, b]$ un chemin continu et C^1 par morceaux. On note

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt,$$

où les $a = t_0 < .. < t_n = b$ sont les points où γ n'est pas dérivable.

Remarque : La quantité $\int_\gamma f$ ne dépend que de $[\gamma]_{or}$. De plus, un changement d'orientation de γ produit un changement de signe de $\int_\gamma f$.

Exemple : On calcule $\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z}$ pour $r \neq |a|$. En utilisant la série entière associée à $(1+X)^{-1}$, on voit que l'on obtient 0 si $r < |a|$, et $2i\pi$ sinon. De même, pour tout triangle T de $\mathbb{C}$ (plein), on peut voir que $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$ pour toute fonction f polynomiale, et donc pour toute série entière dont le disque de convergence englobe (strictement) le triangle..

3.4 Formule de Cauchy pour les chemins et lacets homotopes

Lemme (Goursat): Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $T \subset \Omega$ un triangle **plein** fermé. Lorsque $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$), on a

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Preuve : On suppose pour commencer que $z_0 \notin T$. On pose $T_0 = T$ et on note $T_0^{(1)}, .., T_0^{(4)}$ les triangles semblables à T_0 de rapport $1/2, 1/2, 1/2, -1/2$ obtenus en prenant les milieux des segments qui forment T. On a

$$\int_{\partial T} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial T_0^{(i)}} f.$$

Donc il existe $i_0 \in \{1, .., 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_0^{(i_0)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T} f \right|.$$

On pose alors $T_1 = T_0^{(i_0)}$.

On construit par récurrence des triangles T_k de la manière suivante : on suppose que T_k est défini, et on considère $T_k^{(1)}, .., T_k^{(4)}$ les triangles semblables à T_k de rapport $1/2, 1/2, 1/2, -1/2$ obtenus en prenant les milieux des segments qui forment T_k. On peut alors trouver $i_k \in \{1, .., 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_k^{(i_k)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial T_k} f \right|.$$

On pose alors $T_{k+1} = T_k^{(i_k)}$.

On note $\{\tilde{z}\} = \cap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ (intersection de compacts emboîtés de $\mathbb{C}$ dont le diamètre tend vers 0).

On a

$$\left| \int_{\partial T} f \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial T_k} f \right|$$

$$\leq 4^k \left| \int_{\partial T_k} \left\{ f(z) - f(\tilde{z}) - (z - \tilde{z})\, f'(\tilde{z}) \right\} dz \right|$$

$$\leq 4^k \sup_{a,b \in T_k} |a - b| \times \text{ long } (\partial T_k) \times \sup_{|z - \tilde{z}| \leq \mathrm{diam}(T_k)} \left| \frac{f(z) - f(\tilde{z})}{z - \tilde{z}} - f'(\tilde{z}) \right|$$

$$\leq 2^k \,\mathrm{diam(T)} \times 2^{-k} \text{ long } (\partial T) \times \sup_{z \in B(\tilde{z}, 2^{-k}\,\mathrm{diam(T)})} \left| \frac{f(z) - f(\tilde{z})}{z - \tilde{z}} - f'(\tilde{z}) \right|.$$

On en déduit que

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

Lorsque $z_0 \in T$, on coupe le triangle en quatre morceaux pour se ramener au cas où z_0 est au sommet. Dans ce dernier cas, on coupe de nouveau en quatre morceaux le triangle, celui qui contient le sommet étant de mesure arbitrairement petite. Comme f est bornée, le résultat s'en déduit.

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \Omega$ deux chemins continus définis sur un même intervalle.

1. Si γ_1 et γ_2 ont mêmes extrémités, on dit qu'ils sont homotopes strictement (dans Ω) lorsqu'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ continue (des deux variables), dite homotopie stricte de chemins, telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_1$, $H(\cdot, 1) = \gamma_2$, et

$$H(a, \cdot) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \qquad H(b, \cdot) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

2. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets, on dit qu'ils sont homotopes au sens des lacets lorsqu'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega$ continue (des deux variables), dite homotopie de lacets, telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_1$, $H(\cdot, 1) = \gamma_2$, et $H(\cdot, u)$ est un lacet pour tout $u \in [0, 1]$.

Remarque : l'homotopie stricte de chemin et l'homotopie de lacets sont des relations d'équivalence.

Remarque : Si $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \Omega$ sont des chemins définis sur un même intervalle et équivalents de même orientation, ils sont homotopes strictement: si ϕ est le changement de variables ($\gamma_2 = \gamma_1 \, o \, \phi$), on pose $H(t, u) = \gamma_1((1 - u)\, t + u\, \phi(t))$.

On voit donc que l'on peut définir l'homotopie pour les classes d'équivalence de chemins (avec conservation de l'orientation), en se limitant à des changements de variable conservant l'intervalle source. Mais cela permet aussi de justifier une définition de l'homotopie (et de ses variantes) pour des chemins n'ayant pas le même intervalle source. On utilise pour cela un changement de variable affine par exemple, qui permet de se ramener au même intervalle. Tout autre changement de variables (conservant l'orientation) donnerait alors le même résultat.

Théorème : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$(ou $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$).

1. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets continus et C^1 par morceaux de Ω **homotopes au sens des lacets**, on a $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$. En particulier si γ_2 est le lacet réduit à un point, $\int_{\gamma_1} f = 0$.

2. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins continus et C^1 par morceaux de Ω ayant mêmes extrémités et étant homotopes strictement, $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

En particulier, si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ **convexe** (ou étoilé par rapport à l'un de ses points), alors on a pour tous lacets continus et C^1 par morceaux de Ω : $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$, et pour tous chemins continus et C^1 par morceaux de Ω ayant mêmes extrémités : $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Preuve : On ne la fait que dans le cas d'un ouvert Ω convexe. Dans ce cas les hypothèses d'homotopie sur les chemins (ou lacets) sont en fait automatiquement vérifiées. Si γ_1 et γ_2 sont deuc chemins de mêmes extrémités, on prend en effet comme homotopie stricte la fonction $H(t, u) = (1 - u)\, \gamma_1(t) + u\, \gamma_2(t)$.

Soit $\tilde{z} \in \Omega$. On pose $F(z) = \int_{[\tilde{z},z]} f$, ce qui est bien défini car Ω est convexe.

On a

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[\tilde{z},z+h]} f - \int_{[\tilde{z},z]} f \\ &= \int_{[z,z+h]} f \end{aligned}$$

d'après le théorème de Goursat.

On en déduit que pour tout $z \in \Omega$ (et $|h|$ assez petit),

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f - f(z) \right| \\ &= \left| \int_0^1 f(z+th)\, dt - f(z) \right| \\ &\leq \sup_{|z_1 - z| \leq |h|} |f(z_1) - f(z)| \end{aligned}$$

et ceci tend vers 0 par continuité de f. On voit donc que F est une primitive (holomorphe) de f.

On utilise alors le lemme (qu'il faut par ailleurs connaître pour lui-même) :

Lemme : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\delta : [a,b] \to \Omega$ un chemin continu et C^1 par morceaux, et F, f des fonctions holomorphes sur Ω telles que $F' = f$. Alors,

$$\int_\delta f = F(\delta(b)) - F(\delta(a)).$$

Preuve du lemme : On a

$$\begin{aligned} \int_\delta f &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\delta(t))\, \delta'(t)\, dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (F\, o\, \delta)'(t)\, dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F(\delta(t_{i+1})) - F(\delta(t_i)) \\ &= F(\delta(b)) - F(\delta(a)). \end{aligned}$$

Fin de la preuve : On voit donc que si γ_1 et γ_2 sont des chemins de mêmes extrémités, on a bien $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$. Par ailleurs si δ est un lacet, alors $\int_\delta f = 0$.

3.5 Indice d'un lacet par rapport à un point

Définition : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet continu et C^1 par morceaux de $\mathbb{C}$ tel que $z_0 \notin \gamma([a,b])$. On pose alors

$$Ind_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Proposition : On a

1. $Ind_{z_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}$,
2. Si γ_1 et γ_2 sont des lacets homotopes au sens des lacets de $\mathbb{C} - \{z_0\}$, alors
$$Ind_{z_0}(\gamma_1) = Ind_{z_0}(\gamma_2).$$
3. Pour tout $\delta > 0$,
$$Ind_{z_0}(\theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + \delta\, e^{i\,n\,\theta}) = n.$$
4. La fonction $z_0 \mapsto Ind_{z_0}(\gamma)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$ et nulle sur l'unique composante connexe non bornée de cet ensemble.

Preuve : On suppose (sans restreindre la généralité) que $a = 0, b = 1$. On commence par prouver 1. On pose

$$G(t) = e^{2\,\pi\,i \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\,\frac{ds}{2\,\pi\,i}}.$$

On a alors

$$G'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, e^{2\,\pi\,i \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\,\frac{ds}{2\,\pi\,i}},$$

d'où

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma(t) - z_0}{G(t)}\right] = \frac{\gamma'(t)\,G(t) - (\gamma(t) - z_0)\,G'(t)}{G(t)^2} = 0.$$

D'où

$$\frac{\gamma(1) - z_0}{G(1)} = \frac{\gamma(0) - z_0}{G(0)},$$

et $G(1) = G(0) = 1$. On a donc

$$e^{2\pi i \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} \frac{ds}{2\pi i}} = 1,$$

et par conséquent

$$Ind_{z_0}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} \frac{ds}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

On admet 2.

On obtient 3. par le calcul:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\, n\, \delta\, e^{i n \theta}}{\delta\, e^{i n \theta}} d\theta = n.$$

Pour montrer 4., on remarque que $z_0 \mapsto Ind_{z_0}(\gamma)$ est une fonction continue de $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elle est donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$. De plus,

$$\lim_{|z_0| \to +\infty} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0,$$

si bien que l'on obtient un indice par rapport à z_0 nul sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$.

3.6 Formules de la moyenne et application à l'analyticité

Proposition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soit γ un lacet continu et de classe C^1 par morceaux de Ω homotope (au sens des lacets) à un point. Alors pour tout $z_0 \in \Omega - \gamma([a,b])$, on a

$$f(z_0)\, Ind_{z_0}(\gamma) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i}.$$

En particulier si $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, on a

$$f(z_0) = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{dz}{2\pi i} = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = VM_{C(z_0,r)}(f),$$

où VM désigne la valeur moyenne.

Preuve : Pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction

$$z \longrightarrow \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$. On a donc

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \, \frac{dz}{2\,\pi\, i} = 0,$$

d'où

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \, \frac{dz}{2\,\pi\, i} = f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} \, \frac{dz}{2\,\pi\, i}$$
$$= f(z_0)\, Ind_{z_0}(\gamma).$$

Corollaire : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors f est développable en série entière en tout point z_0 de Ω (c'est-à-dire analytique), de rayon de convergence au moins égal à $\sup\{r > 0, \quad \overline{B(z_0, r)} \subset \Omega\}$. En particulier la $\mathbb{C}$-dérivée f' de f est dans $\mathcal{H}(\Omega)$ (et de même toutes les $\mathbb{C}$-dérivées successives de f). Enfin, $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{\Omega})$.

Preuve : Soit $a \in B(z_0, r)$, où $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. Alors

$$f(a) = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-a} \, \frac{dz}{2\,\pi\, i}$$

$$= \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)\,(1-\frac{a-z_0}{z-z_0})} \, \frac{dz}{2\,\pi\, i}$$

$$= \int_{C(z_0,r)} \sum_{k=0}^{+\infty} (a-z_0)^k \, \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, \frac{dz}{2\,\pi\, i}.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, on remarque que

$$\int_{C(z_0,r)} \sum_{k=0}^{+\infty} |a-z_0|^k \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \frac{dz}{2\,\pi}$$

$$\leq ||f||_{L^\infty(\overline{B(z_0,r)})} \int_{C(z_0,r)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{|a-z_0|}{r} \right)^k \frac{dz}{2\,\pi\, r}$$

$$\leq \frac{||f||_{L^\infty(\overline{B(z_0,r)})}}{1-\frac{|a-z_0|}{r}}.$$

Donc on obtient

$$f(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a-z_0)^k \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\,\pi\,i}.$$

Comme

$$\left| \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\,\pi\,i} \right| \leq \frac{||f||_{L^\infty(\overline{B(z_0,r)})}}{r^k},$$

on voit que f est égale sur $B(z_0,r)$ à une série entière (centrée en z_0) de rayon de convergence au moins égal à r. On en déduit que f est analytique sur Ω. De plus, on sait que f' est encore égale à une série entière (centrée en z_0) de rayon de convergence au moins égal à r (Cf. chapitre 1), et donc $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ (toujours Cf. chapitre 1). Finalement, toutes les $\mathbb{C}$-dérivées successives de f sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, puis (comme les différentielles successives de $\tilde{f}$ s'expriment en fonctions de ces dernières), on voit que $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{\Omega})$.

Proposition (formule de Cauchy pour les dérivées): Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soit γ lacet continu et de classe C^1 par morceaux de Ω, homotope (au sens des lacets) à un point. Alors pour tout $z_0 \in \Omega - \gamma([a,b])$, on a

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\, Ind_{z_0}(\gamma) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\,\pi\,i}.$$

En particulier si $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$, on a

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\,\pi\,i} = \int_{\theta=0}^{2\,\pi} f(z_0 + r\,e^{i\,\theta})\, e^{-i\,k\,\theta} \frac{d\theta}{2\pi\, r^k}.$$

Preuve : Pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z) - \sum_{p=0}^k f^{(p)}(z_0)\, \frac{(z-z_0)^p}{p!}}{(z-z_0)^{k+1}} & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$ (en utilisant la formule de Taylor–Young ou l'analyticité de f).

On en déduit que

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\,\pi\,i} = \sum_{p=0}^k \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \int_\gamma (z-z_0)^{p-k-1} \frac{dz}{2\,\pi\,i}.$$

Mais pour $p \neq k$, la fonction $z \mapsto (z-z_0)^{p-k-1}$ admet une primitive holomorphe sur $\Omega - \{z_0\}$, donc

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2\,\pi\,i} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} \frac{dz}{2\,\pi\,i} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} Ind_{z_0}(\gamma).$$

Théorème (principe des zéros isolés) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors $f^{-1}(\{0\})$ est Ω tout entier, ou bien $f^{-1}(\{0\})$ n'a pas de points d'accumulation dans Ω : c'est un ensemble fermé discret.

Preuve : Soit $z_0 \in \Omega$ un zéro de f. On a (au voisinage de z_0)

$$f(z) = \sum_{i=k}^{+\infty} b_i\,(z-z_0)^i,$$

avec $b_k \neq 0$ (k est alors appelé valuation de f en z_0 et noté $v_{z_0}(f)$), ou bien f est nulle sur un voisinage de z_0. Dans le premier cas, on a donc

$$f(z) = (z-z_0)^k\,\phi(z),$$

où ϕ est holomorphe sur un voisinage de z_0 et ne s'annule pas (sur ce voisinage). On en déduit que z_0 est isolé.

On a donc montré que les zéros de f sont isolés sauf si f est nulle à leur voisinage. On conclut par un argument de connexité. Soit X l'ensemble des points d'accumulation de zéros de f dans Ω. Cet ensemble est clairement ouvert d'après ce qui précède. De plus, il est fermé car si $z_k \in X$ et $z_k \to z$, avec $z \in \Omega$, soit tous les z_k sont égaux sauf un nombre fini d'entre eux, et donc z est l'un des z_k et il est dans X, soit ce n'est pas le cas et alors z est encore dans X. Comme Ω est connexe, X est vide ou $X = \Omega$.

Corollaire (Unicité du prolongement analytique) : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $f = g$ sur $A \subset \Omega$ admettant un point d'accumulation dans Ω, alors $f = g$ sur Ω.

Exemple : La détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$ est le seul prolongement analytique sur cet ensemble de la fonction log définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple : Pour prolonger la fonction Γ sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$, on utilise la formule (vraie pour $\mathcal{R}ez > 0$)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z\,(z+1)\,..\,(z+n)}.$$

3.7 Fonctions méromorphes et théorème des résidus

Définition : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\})$, où Ω est un voisinage ouvert de z_0. Lorsque

$$f(z) = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_{-i}}{(z - z_0)^i} + o_{z \to z_0}(1),$$

on dit que f admet en z_0 un pôle. On appelle alors résidu de f en z_0 le coefficient a_{-1} et on le note $Res_{z_0}(f)$.

Définition : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f \in \mathcal{H}(\Omega - S)$, où $S \subset \Omega$ est un ensemble discret fermé (dans Ω) (on peut aussi dire fini sur tout compact) tel qu'en tout point de S, f admette un pôle. On dit alors que f est méromorphe sur Ω.

Remarque : Une fonction méromorphe sur Ω n'est pas a priori définie sur Ω tout entier. On introduit parfois un point à l'infini ∞, valeur de f en tous les points de S. Cela permet de définir de manière cohérente la sommme et le produit pour des fonctions méromorphes.

Théorème (*Théorème des résidus*) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ un lacet continu et C^1 par morceaux de Ω, homotope (au sens des lacets) à un point, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, S l'ensemble de ses pôles. On suppose que $S \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$. Alors on a

$$\int_\gamma f = 2\pi\, i \sum_{s \in S} Ind_s(\gamma)\, Res_s(f),$$

et cette somme ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes non nuls.

Preuve : On la fait dans le cas où S est fini. Pour $s \in S$, on note $P_s(f)(z) = \sum_{i=1}^{m_s} a_{-i,s}\, (z - s)^{-i}$ la partie singulière de f en s. La fonction g définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{s \in S} P_s(f)(z)$$

est holomorphe sur Ω (Cf. exercices). En appliquant la formule de Cauchy à g, on trouve

$$\int_\gamma f - \sum_{s \in Im(H) \cap S} \int_\gamma P_s(f) = 0.$$

Mais
$$\int_\gamma P_s(f) = \int_\gamma \sum_{i=1}^{m_s} a_{-i,s}\,(z-s)^{-i}$$
$$= 2\pi\, i\, Ind_s(\gamma)\, Res_s(f).$$
En effet, $z \mapsto (z-s)^{-i}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} - \{s\}$ pour $i \neq 1$.

Exemple : Pour $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{Deg}(Q) \geq \mathrm{Deg}P + 2$, $P \wedge Q = 1$, et Q n'ayant pas de racines réelles, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi\, i \sum_{Q(z_0)=0, \mathcal{I}m(z_0)>0} Res_{z_0}\Big(z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}\Big).$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3.8 Exercices

Exercice 1 : En considérant le triangle de sommets $0, R$ et $(1+i)\,R$ et la fonction $z \mapsto e^{-z^2/2}$, calculer (et démontrer la convergence) des intégrales de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$.

Exercice 2 : Calculer la transformée de Fourier d'une Gaussienne centrée réduite, c'est–à–dire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,x\,\xi - x^2/2} dx$.

Exercice 3 : Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Montrer que $\Delta \tilde{f}_1 = \Delta \tilde{f}_2 = 0$. On dit que $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ sont harmoniques.

Exercice 4 : *Rayon de convergence de* tan

1. Montrer que tan est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{\frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

2. En étudiant tan sur $\mathbb{R}$ au voisinage de $\pi/2$, en déduire le rayon de convergence de la série entière qui définit tan en 0.

Exercice 5 : *Théorème de Liouville et théorème de D'Alembert-Gauss*

1. Montrer que toute fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) et bornée est constante (on utilisera la formule de Cauchy pour les dérivées n-ièmes).

2. Montrer que tout polynôme à coefficients complexes de degré strictement positif admet une racine au moins dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 : En utilisant un contour en forme de demi-cercle, calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right. .$$

Exercice 7 : Calculer pour $\alpha \in]0, 1[$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha\,(1+x)}$ en utilisant une détermination holomorphe de la fonction puissance α-ième.

Résultat : $\frac{\pi}{\sin(\pi\,\alpha)}$.

Exercice 8 : Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx$ en utilisant une détermination holomorphe du logarithme.

Résultat : $-1/2$.

Exercice 9 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction de $\mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap C(\Omega)$. Montrer que f est en fait holomorphe sur Ω tout entier. On pourra considérer $g : z \mapsto (z - z_0)^2\,f(z)$.

4 Espaces de Hilbert

4.1 Produit Hermitien

Définition : Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $< \cdot|\cdot >$ de H dans $\mathbb{C}$ est un produit Hermitien lorsqu'elle est linéaire par rapport à la première variable et antilinéaire par rapport à la seconde variable (i.-e. pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$< \lambda\, x|y >= \lambda < x|y >, \qquad < x|\mu\, y >= \overline{\mu} < x|y >,$$

$$< x_1{+}x_2|y >=< x_1|y > + < x_2|y >, \qquad < x|y_1{+}y_2 >=< x|y_1 > + < x|y_2 >),$$

à symétrie hermitienne (i.-e. pour tout $x, y \in H$,

$$< x|y >= \overline{< y|x >}),$$

et définie positive (i.-e. pour tout $x \in H$,

$$< x|x > \geq 0, \qquad \text{et} \qquad < x|x >= 0 \iff x = 0).$$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : Pour $x, y \in H$, on a

$$| < x|y > |^2 \leq < x|x >< y|y > .$$

Preuve : On observe que pour $t \in \mathbb{C}$, $x, y \in H$, on a $< x{+}t\,y|x{+}t\,y > \geq 0$. On en déduit que

$$|t|^2 < y|y > +2\,\mathcal{R}e\,(t < x|y >)+ < x|x > \geq 0.$$

On considère alors

$$t = \lambda\, \frac{\overline{< x|y >}}{| < x|y > |},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\lambda^2 < y|y > +2\,\lambda\, | < x|y > |+ < x|x > \geq 0.$$

Puisque cette quantité ne change pas de signe lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$, on en déduit que le discriminant (réduit) du trinôme est négatif (ou nul). Ceci fournit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition (Inégalité de Minkowsky) : Pour $x, y \in H$, on a

$$\sqrt{< x+y|x+y >} \leq \sqrt{< x|x >} + \sqrt{< y|y >}.$$

On en déduit que $||x||_H = \sqrt{< x|x >}$ est une norme sur H.

Preuve : On a

$$< x+y|x+y > = < x|x > + < y|y > + 2\,\mathcal{R}e\,(< x|y >),$$

on obtient l'inégalité de Minkowsky en passant aux racines carrées et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On vérifie alors facilement que toutes les propriétés des normes sont satisfaites.

Exemple : On peut considérer $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}, u_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\in Z} |u_n|^2 < +\infty\}$, muni du produit Hermitien

$$< (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} | (v_n)_{n\in\mathbb{Z}} > = \sum_{n\in Z} u_n\, \bar{v}_n.$$

De même, $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$ définies à un ensemble de mesure nulle près , $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < +\infty\}$, muni du produit Hermitien

$$< f|g > = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Enfin, $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$ définies à un ensemble de mesure nulle près et 2π-périodiques, $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx < +\infty\}$, muni du produit Hermitien

$$< f|g > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

4.2 Projection orthogonale, Bases Hilbertiennes

Définition : On dit d'un espace vectoriel H sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit Hermitien que c'est un espace de Hilbert lorsqu'il est complet (pour la norme associée au produit Hermitien).

Proposition : Les espaces $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définis précédemment sont des espaces de Hilbert. De plus, les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (pour sa norme) et les fonctions continues 2π-périodiques sont denses dans $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (pour sa norme).

Définition : Soit H un espace de Hilbert et P une partie de H. On pose $P^\perp = \{x \in H, \quad \forall y \in P, \quad < x|y > = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de H appelé l'orthogonal de P.

Proposition : Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Il existe une unique application linéaire continue (de norme égale à 1) p de H dans F telle que

$$\forall x \in H, y \in F, \qquad ||x - p(x)||_H \leq ||x - y||_H.$$

De plus, pour $x \in H$, $p(x)$ est caractérisé par les relations :

$$p(x) \in F, \qquad \forall y \in F, \quad < x - p(x)|y >= 0.$$

En particulier, on a la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$.

Corollaire : Soit H un espace de Hilbert. Si A est un sous-espace vectoriel de H, on a

$$\bar{A} = H \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^{\perp} = \{0\}.$$

Preuve : L'implication dans le sens direct est évidente. L'implication réciproque provient de la formule $H = F \oplus F^{\perp}$ appliquée à $F = \bar{A}$.

Définition : Soit $(e_n)_{n \in A}$ une famille d'éléments de H. On dit que c'est une base Hilbertienne de H lorsque

$$\forall n, p \in A, < e_n|e_p >= \delta_{np},$$

et

$$\overline{Vect((e_n)_{n \in A})} = H.$$

Proposition : Pour tout $x \in H$, on a l'égalité

$$x = \sum_{n \in A} < x|e_n > e_n$$

(la convergence étant au sens de la norme de H) et l'égalité de Parseval :

$$||x||^2 = \sum_{n \in A} | < x|e_n > |^2.$$

Preuve : On la fait pour $A = \mathbb{Z}$. On note p_N la projection sur le sous-espace (fermé car de dimension finie) $Vect((e_n)_{|n| \leq N})$. On vérifie (en utilisant la caractérisation du projeté) que

$$p_N(x) = \sum_{|n| \leq N} < x|e_n > e_n.$$

On sait que $||x - p_N(x)|| \to 0$ car $\overline{Vect((e_n)_{n\in A})} = H$ (donc pour ε donné, il existe $x_N \in Vect((e_n)_{|n|\le N})$ tel que $||x - x_N|| < \varepsilon$, et $||x - p_N(x)|| \le ||x - x_N||$).

L'égalité de Parseval s'obtient en calculant la norme de x : $||x||^2 = ||x - p_N(x)||^2 + ||p_N(x)||^2$, et $||p_N(x)||^2 = \sum_{|n|\le N} |< x|e_n >|^2$. On conclut en se souvenant que $||x - p_N(x)|| \to 0$.

Proposition : La famille $(x \in \mathbb{C} \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Preuve : La propriété d'othonormalité est évidente. Le fait que la famille est totale est démontré en exercice.

Corollaire : On retrouve les propriétés des séries de Fourier (dans un cadre un peu plus général) : pour $f \in L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-i\,n\,y}\, dy\ e^{i\,n\,x},$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme de $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (en particulier, attention au fait que f n'est défini que presque partout).

De plus, on a l'égalité de Parseval (toujours pour $f \in L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) :

$$2\pi \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^{2\pi} f(y)\, e^{-i\,n\,y}\, dy \right|^2.$$

Proposition : (Transformée de Fourier des fonctions de L^2) Pour $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$||\hat{f}||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N\, ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve : On la fait au niveau formel (sans se préoccuper de la validité des calculs), et pour f à valeurs réelles.

D'après la formule d'inversion,

$$(g * g)(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\,\xi}\, \hat{g}(\xi)^2\, d\xi,$$

si bien que

$$(g * g)(0) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi)^2\, d\xi.$$

En considérant $g = \hat{f}$, on obtient

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\hat{f}}(y)^2 \, dy$$

$$= (2\pi)^N \int_{\mathbb{R}^N} f(y)^2 \, dy.$$

Comme $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que la transformée de Fourier se prolonge en une (quasi)-isométrie de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

4.3 Exemples d'opérateurs

Définition : Soit H un espace de Hilbert. On appelle opérateur borné sur H une application linéaire continue de H dans H. On appelle opérateur non-borné sur H une application linéaire de A dans H, où A est un sous-espace dense de H (pour la norme de H).

Exemple : Lorsque $H = L^2(\mathbb{R}^N)$, on prend souvent $A = \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, les applications $f \mapsto x_i \, f$ et $f \mapsto \partial_{x_i} f$ sont des opérateurs non bornés.

Définition : Lorsque T est un opérateur sur H (de domaine A), on dit que u est un vecteur propre de T et $\lambda \, (\in \mathbb{C})$ une valeur propre de T lorsque $u \in A - \{0\}$ et $Tu = \lambda \, u$.

Remarque : En dimension finie, on sait que pour une application linéaire, l'injectivité et la surjectivité sont équivalentes. Ceci n'est plus le cas en dimension infinie, même pour les opérateurs bornés.

Exemple : Ainsi, on pose $T_d : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $T_d(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|_0 = 0$ et $T_g : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, opérateurs de shift à droite et à gauche. On voit que $Ker(T_d) = \{0\}$ (0 n'est donc pas valeur propre de T_d). Par contre $Im(T_d) \neq H$. Réciproquement, $Ker(T_g) \neq 0$, mais $Im(T_g) = H$.

Définition : Soit T un opérateur. On dit que T est formellement autoadjoint si $< Tx|y >=< x|Ty >$, formellement antiautoadjoint si $< Tx|y >= - < x|Ty >$ et formellement unitaire si $< Tx|Ty >=< x|y >$.

Exemple : L'opérateur $f \mapsto x \, f$ est formellement autoadjoint, l'opérateur $f \mapsto f'$ est formellement antiautoadjoint, et l'opérateur $(2\pi)^{-N/2} \, \mathcal{F}$ est formellement unitaire.

Proposition : Les valeurs propres d'un opérateur formellement autoadjoint sont réelles, celles d'un opérateur formellement antiautoadjoint sont imaginaires pures, et celles d'un opérateur formellement unitaire sont de module 1. De plus, les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes pour de tels opérateurs sont orthogonaux.

Exemple : On considère l'opérateur $f \mapsto f'$ sur $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont les $i\,n$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Ses vecteurs propres sont les $x \mapsto e^{i\,n\,x}$ (connus pour former une famille orthogonale).

En fait ses vecteurs propres forment une base Hilbertienne, et cette situation se généralise à beaucoup de cas (mais pas toujours : il suffit de considérer le même opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$). On peut montrer le résultat suivant : Soit H un espace de Hilbert (séparable) et T un opérateur borné vérifiant la propriété : $T(B(0,1))$ est (relativement) compact dans H. Alors si T est formellement autoadjoint, il existe une base Hilbertienne de H formée d'une suite de vecteurs propres de T. Les valeurs propres correspondantes forment une suite de réels tendant vers 0. Si l'on remplace formellement autoadjoint par formellement antiautoadjoint, la suite de valeurs propres est formée d'imaginaires purs. Il arrive (souvent) que T ne soit pas compact mais que pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$, $(T - \lambda\, Id)^{-1}$ soit (bien défini et) compact. Dans ce cas, on lui applique le théorème.

Les critères de compacité dans les espaces de type L^2 sont en général compliqués (en particulier il y a toujours dans ce type d'espace des fermés bornés qui ne sont pas compacts, par exemple la boule unité fermée). Voici un tel critère : si $\mathcal{F}$ est une famille bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{B(0,R)^c} |f(x)|^2\, dx = 0,$$

et

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{B(0,R)^c} |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = 0,$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

En fait, on voit d'après ce critère qu'il faut se prémunir des familles où “la masse part à l'infini” telles que $1_{|x-n|\le 1}$ et des familles “oscillantes” telles que $\sin(n\,x)\, 1_{|x|\le 1}$.

4.4 Exercices

Exercice 1 : *Le théorème de projection.* Soit H un espace de Hilbert, $< \cdot | \cdot >$ son produit Hermitien, et $|| \cdot ||$ sa norme. On considère $x \in H$ et F un sous-espace vectoriel fermé de H. Enfin, on note $d = \inf_{y \in F} ||x - y||$.

1. Montrer la "propriété de la médiane" :

$$\forall x, y \in H, \qquad \left|\left| \frac{x+y}{2} \right|\right|^2 + \left|\left| \frac{x-y}{2} \right|\right|^2 = \frac{1}{2} \left(||x||^2 + ||y||^2 \right).$$

2. On considére une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F vérifiant $||x - y_n|| \to d$. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$||y_p - y_q||^2 \leq 4 \left(\frac{1}{2} ||x - y_p||^2 + \frac{1}{2} ||x - y_q||^2 - ||x - \frac{1}{2} (y_p + y_q)||^2 \right).$$

En déduire que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de H, qui converge vers un élément de F que l'on notera $p_F(x)$, et qui vérifie $||x - p_F(x)|| = d$.

3. En considérant $p_F(x) + \varepsilon\, y$, avec $y \in F$, et $\varepsilon \in \mathbb{C}$, montrer que

$$< x - p_F(x) | y >= 0.$$

4. Réciproquement, on suppose que $z \in F$ vérifie la propriété :

$$\forall y \in F, \qquad < x - z | y >= 0.$$

Montrer que $z = p_F(x)$.

5. Montrer que si $F \neq \{0\}$, alors p_F est une application linéaire dont la restriction à F est l'identité et qui est de norme triple égale à 1. Pour cette dernière propriété, on pourra remarquer que l'on a le "théorème de Pythagore":

$$\forall x \in H, \qquad ||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||(p_F - Id)(x)||^2.$$

Exercice 2 : *La famille $(e_n : x \in \mathbb{C} \mapsto e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale.*

1. On considère la fonction

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=-n}^{n} e^{i\,p\,x}.$$

Montrer que

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. On note

$$K_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}y)}{\sin^2(\frac{y}{2})} f(x-y)\, dy.$$

Montrer que $K_N(f) \in Vect((e_n)_{|n|\leq N})$.

3. Montrer que

$$\frac{1}{N+1}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}y)}{\sin^2(\frac{y}{2})}\, dy = 1.$$

Montrer que pour $\delta > 0$ (assez petit),

$$|K_N(f)(x) - f(x)| \leq \frac{2\pi}{N+1}\frac{||f||_\infty}{\sin^2(\delta/2)} + \sup_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)|.$$

En déduire que $K_N(f)$ converge uniformément vers f lorsque $N \to +\infty$.

4. En utilisant la densité des fonctions continues et 2π-périodiques dans les fonctions de $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la norme de $L^2_{2\pi-per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, montrer que la famille $(e_n : x \in \mathbb{C} \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale dans cet espace (c'est à dire que l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense).

5 Distributions

5.1 Nécessité de dériver des fonctions non dérivables

On considère un fluide de densité ρ, de vitesse $u = (u_1, u_2, u_3)$ et de température T. Chacune de ces quantités est une fonction des variables t et x représentant le temps et la position. On suppose que le fluide obéit aux lois d'état thermodynamiques

$$p = p(\rho, T), \qquad e = e(\rho, T),$$

où p est la pression du fluide, e son énergie interne.

Les équations d'Euler des fluides compressibles s'écrivent

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho\, u) = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t(\rho\, u_i) + \operatorname{div}_x(\rho\, u_i\, u) + \partial_{x_i} p = 0, \tag{3}$$

$$\partial_t \left(\rho\, \frac{|u|^2}{2} + e \right) + \operatorname{div}_x \left((\rho\, \frac{|u|^2}{2} + e + p)\, u \right) = 0. \tag{4}$$

Une version (très) simplifiée de ces équations est le modèle de Bürgers, dans lequel $x \in \mathbb{R}$, et $u \equiv u(t, x)$ vérifie l'équation

$$\partial_t u + u\, \partial_x u = 0.$$

On ajoute la condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

Supposons que l'on dispose d'une solution u de classe $C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ (supposée bornée) de l'équation de Bürgers. On considère ϕ_{x_0} définie par

$$\phi'_{x_0}(t) = u(t, \phi_{x_0}(t)), \qquad \phi_{x_0}(0) = x_0.$$

Une telle fonction de $C^1([0, T])$ existe d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (et son extension parfois appelée théorème des bouts).

On voit que

$$\frac{d}{dt} \Big\{ u(t, \phi_{x_0}(t)) \Big\} = \partial_t u(t, \phi_{x_0}(t)) + \phi'_{x_0}(t)\, \partial_x u(t, \phi_{x_0}(t))$$

$$= \partial_t u(t, \phi_{x_0}(t)) + u(t, \phi_{x_0}(t))\, \partial_x u(t, \phi_{x_0}(t))$$

$$= 0.$$

On en déduit que

$$u(t, \phi_{x_0}(t)) = u(0, \phi_{x_0}(0)) = u_0(x_0).$$

Donc

$$\phi'_{x_0}(t) = u_0(x_0),$$

et

$$\phi_{x_0}(t) = x_0 + u_0(x_0)\, t.$$

Finalement,

$$u(t, x_0 + u_0(x_0)\, t) = u_0(x_0).$$

Si u_0 n'est pas croissante, alors on peut trouver $x_1 < x_2$ tels que $u_0(x_1) > u_0(x_2)$. Mais alors il existe $t > 0$ tel que $x_1 + u_0(x_1)\, t = x_2 + u_0(x_2)\, t$. Si $t \leq T$, on en déduit que $u_0(x_1) = u_0(x_2)$, ce qui est absurde.

On en déduit que dès que u_0 n'est pas croissante, alors il n'y a pas de solution de classe $C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ (bornée) de l'équation de Bürgers lorsque T est assez grand.

Le même type d'analyse est valable pour les équations d'Euler des fluides compressibles. Au bout d'un temps T, sauf exception, il y a apparition de singularités (discontinuités) dans les solutions de ce type d'équations (en physique, on les appelle des chocs). Il faut alors pouvoir donner un sens aux équations lorsque les inconnues ne sont pas dérivables (et même, en fait, pas continues).

Finalement, on voit qu'il est nécessaire de définir la dérivée d'une fonction non dérivable (et même non continue).

5.2 Fonctions C^∞ à support compact

Soit $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On rappelle qu'elle est à support dans un ensemble fermé K si pour $x \in K^c$, $\phi(x) = 0$. On dit qu'elle est à support compact s'il existe $R > 0$ tel que pour $x \in B(0, R)^c$, $\phi(x) = 0$ (A^c désigne le complémentaire de A, c'est–à–dire $\mathbb{R}^N - A$). On peut vérifier que cela signifie bien que son support est compact !

Définition : On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

La proposition suivante montre que l'on peut fabriquer de nombreuses fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition : L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Preuve : On commence par remarquer que $L^1_c(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la suite $f_n = f\, 1_{B(0,n)}$ est dans $L^1_c(\mathbb{R}^N)$ et converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ du fait du théorème de convergence dominée.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^1_c(\mathbb{R}^N)$ pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour cela, on considère $f \in L^1_c(\mathbb{R}^N)$. Alors la suite $f_n = f * \phi_n$, où ϕ_n est une suite régularisante, est de classe C^∞ et converge dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ vers f. On conclut en remarquant que le support de f_n est inclus dans $B(0, R+1)$ si celui de f est inclus dans $B(0, R)$.

5.3 Définition des distributions, convergence au sens des distributions

Définition : On appelle distribution une forme linéaire (c'est–à–dire une application linéaire à valeur dans $\mathbb{R}$) T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ "continue", c'est–à–dire telle que pour tout $R > 0$, il existe $C_R > 0$ et $p_R \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ à support dans $B(0, R)$,

$$| < T, \phi > | \le C_R \sum_{|\alpha| \le p_R} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des distributions (c'est clairement un espace vectoriel).

A toute *classe de* fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est associée une distribution notée T_f définie par

$$< T_f, \phi >= \int_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)\, \phi(x)\, dx.$$

En effet (si ϕ est à support dans $B(0, R)$),

$$| < T_f, \phi > | \le ||f||_{L^1(B(0,R))} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\phi(x)|.$$

On peut identifier f à T_f grâce au résultat suivant d'unicité :

Proposition : Soit $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Alors $T_f = T_g \Rightarrow f = g$.

Preuve : On la fait lorsque f, g sont bornées.

On montre que $\int (f-g)\, 1_{f-g\geq 0}\, 1_{B(0,R)} = 0$. Pour cela, on approxime $1_{f-g\geq 0}\, 1_{B(0,R)}$ par des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ en posant $h_n = 1_{f-g\geq 0}\, 1_{B(0,R)} * \phi_n$, où ϕ_n est une suite régularisante. On sait que h_n est de classe C^∞, et que d'autre part le support de h_n est inclus dans $B(0, R+1)$. On en déduit que (puisque $T_f = T_g$), $\int (f-g)\, h_n = 0$. Or $h_n \to 1_{f-g\geq 0}\, 1_{B(0,R)}$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, et comme $f-g$ est supposée bornée, on en déduit du fait de la convergence dominée que $\int (f-g)\, 1_{f-g\geq 0}\, 1_{B(0,R)} = 0$. Donc $f \leq g$ (p.p.) sur $B(0,R)$, et en changeant le rôle de f et g, $f = g$ (p.p.) sur $B(0,R)$. On conclut en prenant R arbitrairement grand.

Attention : à deux fonctions égales presque partout correspondent la même distribution.

De nombreuses distributions existent qui ne sont pas de la forme T_f. En particulier, la masse de Dirac δ_0 définie par $< \delta_0, \phi >= \phi(0)$, et ses dérivées $< \partial^\alpha \delta_0, \phi >= (-1)^{|\alpha|}\, \partial^\alpha \phi(0)$. On définit également (pour $N = 1$) la distribution

$$< vp(\frac{1}{x}), \phi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Définition : On dit d'une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur $\mathbb{R}^N$) qu'elle converge vers une distribution T lorsque $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $< T_n, \phi > \to < T, \phi >$.

Exemple : Si $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $T_{f_n} \to T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Mais attention, une suite de fonctions peut converger dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ vers une distribution qui n'est pas une fonction : ainsi, les suites régularisantes convergent vers δ_0. Enfin, si $T_{f_n} \to T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, alors on n'a pas nécessairement $T_{f_n^2} \to T_{f^2}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, $\sin(nx) \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais $\sin(nx)^2 \to 1/2$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On remarquera que si $T_n \to T$ et $T_n \to U$, alors $T = U$ (il y a unicité de la limite).

5.4 Dérivation et multiplication

Définition - Proposition : Pour $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on note ϕT la distribution définie par

$$< \phi T, \psi > = < T, \phi \psi > .$$

Pour montrer qu'il s'agit bien d'une distribution, on utilise les formules de Leibnitz.

Proposition : On prolonge ainsi la multiplication des fonctions, autrement dit $\phi T_f = T_{\phi f}$.

Preuve : Pour toute fonction test ψ,

$$\begin{aligned} < \phi T_f, \psi > &= < T_f, \phi \psi > \\ &= \int f \phi \psi \\ &= < T_{\phi f}, \psi > \end{aligned}$$

Attention : on ne peut multiplier en général une fonction peu régulière par une distribution, encore moins deux distributions.

Exemple : $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$ (ou plus précisément T_1), $\phi \delta_0 = \phi(0) \delta_0$.

Définition - Proposition : Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on note $\partial^\alpha T$ la distribution définie par

$$< \partial^\alpha T, \psi > = (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \psi > .$$

On vérifie immédiatement qu'il s'agit d'une distribution.

Proposition : On prolonge ainsi la dérivation (α-ième) des fonctions de classe $C^{|\alpha|}$, autrement dit pour $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$

Preuve : Pour toute fonction test ϕ, et $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} < \partial^\alpha T_f, \phi > &= (-1)^{|\alpha|} < T_f, \partial^\alpha \phi > \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int f(x)\, \partial^\alpha \phi(x)\, dx \end{aligned}$$

$$= \int \partial^\alpha f(x)\,\phi(x)\,dx$$
$$=< T_{\partial^\alpha f}, \phi > .$$

On calcule la dérivée au sens des distributions des fonctions d'une variable ayant des discontinuités simples (parfois dites "de première espèce") grâce à la "formule des sauts" :

Proposition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. On note $(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble (fermé discret) de ses points de discontinuités, et $f_i^\pm = \lim_{x\to x_i^\pm} f(x)$. Alors,

$$(T_f)' = f' + \sum_{i\in I} (f_i^+ - f_i^-)\,\delta_{x_i}.$$

Preuve : On la fait dans le cas où on a un seul point de dicontinuité $x_0 = 0$. On écrit pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$:

$$< (T_f)', \phi >= - < T_f, \phi' >= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\phi'(x)\,dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,\phi'(x)\,dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\phi'(x)\,dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\phi'(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f'(x)\,\phi(x)\,dx - f(-\varepsilon)\,\phi(-\varepsilon) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,\phi'(x)\,dx$$
$$+ \int_{\varepsilon}^{+\infty} f'(x)\,\phi(x)\,dx + f(\varepsilon)\,\phi(\varepsilon).$$

On fait ensuite tendre ε vers 0, ce qui fournit

$$< (T_f)', \phi >= \int_{-\infty}^{0} f'(x)\,\phi(x)\,dx + f(0^+)\,\phi(0) + \int_{0}^{+\infty} f'(x)\,\phi(x)\,dx - f(0^-)\,\phi(0),$$

d'où le résultat.

Proposition : Dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$-\Delta(T_{x\mapsto |x|^{-1}}) = 4\,\pi\,\delta_0.$$

Preuve : On note $n(x) = -\frac{x}{|x|}$ la normale extérieure à $B(0,\varepsilon)^c$. Pour une fonction test ϕ, on calcule

$$< -\Delta(|x|^{-1}), \phi >= - \int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-1}\,\Delta\phi(x)\,dx$$

$$= -\int_{B(0,\varepsilon)^c} |x|^{-1}\,\Delta\phi(x)\,dx + O(\varepsilon^2)$$
$$= \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla(|x|^{-1})\cdot\nabla\phi(x)\,dx - \int_{S(0,\varepsilon)} |x|^{-1}\nabla\phi(x)\cdot n(x)\,d\sigma(x) + O(\varepsilon^2)$$
$$= \int_{B(0,\varepsilon)^c} -|x|^{-3}\,x\cdot\nabla\phi(x)\,dx + \varepsilon^{-1}\int_{S(0,\varepsilon)} \nabla\phi(x)\cdot\frac{x}{|x|}\,d\sigma(x) + O(\varepsilon^2)$$
$$= \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla\cdot(|x|^{-3}\,x)\,\phi(x)\,dx - \int_{S(0,\varepsilon)} |x|^{-3}\,x\cdot n(x)\,\phi(x)\,d\sigma(x) + O(\varepsilon)$$
$$= \int_{S(0,\varepsilon)} |x|^{-2}\,\phi(x)\,d\sigma(x) + O(\varepsilon)$$
$$= \varepsilon^2\int_{S(0,1)} \varepsilon^{-2}\,\phi(\varepsilon\,y)\,d\sigma(y) + O(\varepsilon)$$
$$= 4\pi\,\phi(0) + O(\varepsilon).$$

Remarque : Le même calcul montre que pour tout $y \in \mathbb{R}^3$,

$$-\Delta(T_{x\mapsto|x-y|^{-1}}) = 4\,\pi\,\delta_y.$$

Ceci permet de faire le lien entre l'équation de Poisson de l'électrostatique et le potentiel créé par une charge ponctuelle.

Proposition : La multiplication par une fonction C^∞ et la dérivation sont des opérations continues pour la convergence au sens des distributions.

la preuve de cette proposition est immédiate. Ceci montre que la convergence au sens des distributions est bien adaptées aux processus linéaires. Elle est par contre tout-à-fait inadaptée aux processus non-linéaires comme le montre le contre-exemple avec $\sin(nx)$.

5.5 Convolution et transformée de Fourier des distributions

Proposition : Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on pose $(T*\phi)(x) =< T, \phi(x-\cdot) >$. La fonction $T*\phi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ et vérifie

$$\partial^\alpha(T*\phi) = T*(\partial^\alpha\phi) = (\partial^\alpha T)*\phi.$$

Proposition : Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a $\delta_0 * \phi = \phi$, plus généralement $\partial^\alpha\delta_0 * \phi = \partial^\alpha\phi$.

Corollaire : Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$-\Delta\Big(\int \frac{f(y)}{4\pi\,|x-y|}\,dy\Big) = f(x).$$

Cette formule permet d'inverser le Laplacien sur $\mathbb{R}^3$. On dit que $(x,y) \mapsto -\frac{1}{4\pi\,|x-y|}$ est la fonction de Green de cet opérateur.

Remarque : En fait, il est possible de définir la convolée de deux distributions dans beaucoup de situations (par exemple pour deux distributions dont l'une est à support compact), mais pas en toute généralité.

Pour définir la transformée de Fourier des distributions, on se heurte au problème suivant : comme

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\hat{\phi}(x)\,dx,$$

on est amené à poser pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$,

$$< \mathcal{F}T, \phi > = < T, \mathcal{F}\phi > .$$

Mais lorsque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on ne peut avoir $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ (sauf si $\phi = 0$ p.p.). C'est en effet une des versions du principe d'incertitude de Heisenberg : on peut s'en rendre compte en développant $x \to e^{-i\,x\,\xi}$ en série entière.

Pour résoudre ce problème, on introduit l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide :

Définition : On pose

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}), \quad \forall\alpha \in \mathbb{N}^N, l \in \mathbb{N},$$

$$\exists\, C_{\alpha,l} \geq 0, \qquad |\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,l}}{(1+|x|^2)^l}\ \}.$$

Exemple : Les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mais les fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\,e^{-x^2/2}$, où $P \in \mathbb{C}[X]$, sont également dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors qu'elles ne sont pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

L'intérêt des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour la transformée de Fourier provient de la proposition suivante :

Proposition : Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve On la fait dans le cas particulier où $N = 1$. On obersve que

$$||\xi \mapsto (1+\xi^2)^k\, \hat{f}^{(l)}(\xi)||_{L^\infty(\mathbb{R})} = ||\pm \mathcal{F}((id + \frac{d^2}{dx^2})^k[(x \mapsto x^l)\, f])||_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq ||((id + \frac{d^2}{dx^2})^k[(x \mapsto x^l)\, f])||_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq ||\sum_{p=0}^{k}\sum_{r=0}^{2p} C_k^p\, C_{2p}^r [\frac{d^r}{dx^r}(x \mapsto x^l)]\, f^{(2p-r)}||_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq Cst \sup_{q\leq 2k, s\leq l} ||(x \mapsto |x|^s)\, f^{(q)}||_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq Cst\, ||f||_{l+2;2k}.$$

On définit maintenant l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées :

Définition : On appelle $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des formes linéaires T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant la propriété suivante : $\exists p, q \in \mathbb{N}$, $C \geq 0$,

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad | < T, \phi > | \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^N, |\alpha|\leq p} (1+|x|^2)^q\, |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Exemple : Toute fonction à croissance polynômiale, et même toute dérivée (au sens des distributions) de fonction à croissance polynômiale, est une distribution tempérée. Par contre, une fonction à croissance trop rapide, même C^∞, telle que $x \mapsto e^x$, ne définit pas une distribution tempérée.

Définition - Proposition : Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$< \mathcal{F}T, \phi > = < T, \mathcal{F}\phi > .$$

On définit ainsi une distribution tempérée.

Remarque : Cette définition de la transformée de Fourier prolonge celle de la transformée de Fourier des fonctions de L^1. En d'autres termes, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.

Exemple : $\hat{\delta}_0 = T_{x\to 1}$.

Les formules obtenues pour la transformée de Fourier dans L^1 se prolongent pour la plupart à la la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ dès qu'elles gardent un sens.

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \hat{T} = -i\, \widehat{x_i\, T}, \qquad \widehat{\frac{\partial T}{\partial x_i}} = i\, \xi_i\, \hat{T}.$$

De même, on a la formule d'inversion de Fourier :

$$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^N\, T(-\cdot).$$

On déduit de ces formules de nombreuses transformées de Fourier. Ainsi, en dimension 1,

$$\widehat{\delta_0'} = T_{x \to ix}, \qquad \widehat{T_{x \to 1}} = 2\pi\, \delta_0.$$

De même, en dimension 3, on peut montrer (mais c'est un peu plus difficile) que $\mathcal{F}(x \mapsto |x|^{-1}) = (\xi \mapsto 4\pi\, |\xi|^{-2})$, ce qui est une réinterprétation de la formule donnant la solution élémentaire du Laplacien. On verra au chapitre suivant d'autres calculs de solution d'EDP à partir de la transformée de Fourier.

5.6 Exercices

Exercice 1 : *La convolée d'une distribution et d'une fonction test est régulière.*

1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h| \leq 1$, et I intervalle borné de $\mathbb{R}$, la norme infinie sur I de la dérivée k-ième ($k \in \mathbb{N}$ quelconque) de la fonction $y \mapsto \phi(x+h-y) - \phi(x-y) - h\, \phi'(x-y)$ est majorée par une constante fois $|h|^2$.

2. En déduire que si T est une distribution sur $\mathbb{R}$, alors $T * \phi$ est une fonction de classe C^1 de dérivée $T * \phi'$. Montrer par récurrence que $T * \phi$ est une fonction de classe C^∞.

3. Généraliser le résultat précédent en dimension $N > 1$.

Exercice 2 : *La transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même, et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même.*

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $l \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$||(1 + |\cdot|^2)^l\, \partial^\alpha \hat{f}||_\infty \leq C\, ||(Id - \Delta)^l[(i\,\cdot)^\alpha f]||_{L^1}.$$

2. En déduire que

$$||(1+|\cdot|^2)^l\,\partial^\alpha \hat{f}||_\infty \leq C \sum_{|b|\leq|\alpha|,|\gamma|\leq 2l} \int |x|^b\,|\partial^\gamma f(x)|\,dx.$$

3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$||(1+|\cdot|^2)^l\,\partial^\alpha \hat{f}||_\infty \leq C_\varepsilon \sup_{|\gamma|\leq 2l} ||(1+|\cdot|^2)^{(N+|\alpha|)/2+\varepsilon}\,\partial^\gamma f||_\infty.$$

En déduire que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est invariant par la transformée de Fourier.

4. Montrer que si T est une distribution tempérée, alors $\mathcal{F}T$ est également une distribution tempérée.

Exercice 3 : Montrer que $vp(1/x)$ est une distribution (sur $\mathbb{R}$). Montrer qu'elle est limite au sens des distributions de la suite $\frac{1}{x}\,1_{|x|\geq 1/n}$.

Exercice 4 : Montrer que $Pf(1/x^2)$ est une distribution (sur $\mathbb{R}$). Montrer qu'elle est limite au sens des distributions de la suite $\frac{1}{x^2}\,1_{|x|\geq 1/n}$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $x\,T = 0$, puis l'équation $T' = 0$, et enfin l'équation $T' = T$.

Exercice 6 : Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$, puis la dérivée et la dérivée seconde au sens des distributions de la fonction $x \mapsto \log|x|$.

6 Equations aux dérivées partielles

6.1 Equations d'ordre 1 : la méthode des caractéristiques

Pour résoudre les équations d'ordre 1 du type

$$\partial_t u + a(t,x)\,\partial_x u = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

où l'inconnue est $u \equiv u(t,x)$, avec $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, on introduit l'équation différentielle dite caractéristique

$$\phi'_{x_0}(t) = a(t, \phi_{x_0}(t)),$$

$$\phi_{x_0}(0) = x_0.$$

Si a a de bonnes propriétés, alors grâce au théorème de Cauchy, ϕ_{x_0} est bien définie pour $t \geq 0$. On remarque que si ϕ_{x_0} est une solution de cette équation, alors

$$\frac{d}{dt}(t \mapsto u(t, \phi_{x_0}(t))) = 0.$$

En effet,

$$\frac{d}{dt}(t \mapsto u(t, \phi_{x_0}(t))) = \partial_t u(t, \phi_{x_0}(t)) + \phi'_{x_0}(t)\,\partial_x\, u(t, \phi_{x_0}(t)).$$

Alors $u(t, \phi_{x_0}(t)) = u_0(x_0)$: on dit que u est constante le long des caractéristiques.
On conclut en posant $x = \phi_{x_0}(t)$ et en "résolvant" cette équation en x_0 (on remonte les caractéristiques). On obtient ainsi l'expression de x_0 en fonction de x et t : $x_0 = g(t,x)$. Ainsi, on peut exprimer:

$$u(t,x) = u_0(g(t,x))$$

Exemple : Si on considère l'équation $\partial_t\, u + c\,\partial_x\, u = 0$, où c est une constante, on retrouve la solution classique $u(t,x) = u_0(x - c\,t)$.
En effet, les caractéristiques sont $\phi_{x_0}(t) = x_0 + c\,t$. On trouve alors que $x_0 = x - c\,t = g(x,t)$ le long des caractéristiques ce qui nous donne la solution.

Remarque : cette méthode dite méthode des caractéristiques fonctionne aussi si l'inconnue u est fonction de plusieurs variables (en plus de t), et que l'on a une EDP du type

$$\partial_t u + \sum_i a_i \, \partial_{x_i} u = 0.$$

Les caractéristiques sont alors des courbes en dimension supérieure, que l'on "remonte" de la même manière. Par contre, cette méthode ne marche plus quand u est à valeur vectorielle.

Strictement parlant, ce calcul est une "analyse" du problème, qui permet de trouver un unique "candidat-solution". En fait on vérifie qu'il s'agit effectivement d'une solution (on peut le faire directement sur les cas pratiques).

Les courbes caractéristiques s'interprètent comme les isovaleurs (ou courbes de niveau) de la solution de l'EDP.

Exemple : Considérons l'équation:

$$\partial_t u - y \, \partial_x u(t, x, y) + x \partial_y u(t, x, y) = 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Alors, par la méthode des caractéristiques, on trouve comme solution possible du problème:

$$u(t, x, y) = u_0(x \cos(t) + y \sin(t), y \cos(t) - x \sin(t)).$$

On peut vérifier directement que c'est bien une solution au problème.

6.2 L'équation de la chaleur

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(\partial_t - \Delta_x) u(t, x) = 0, \text{ sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N$$

$$u(0, x) = u_0(x),$$

où u_0 est continue, bornée et dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.
On commence par l'analyse du problème: soit u une solution. On utilise la transformée de Fourier partielle (en x) de u notée $\tilde{u}$. On a :

$$(\partial_t + |\xi|^2) \tilde{u}(t, \xi) = 0, \text{ sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N$$

$$\tilde{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi).$$

On peut alors résoudre ce problème :

$$\tilde{u}(t,\xi) = \hat{u_0}(\xi)\, e^{-t\,|\xi|^2}$$

Or, si l'on considère, à $t > 0$ fixé, la fonction $E_t(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\,t}}}{(\sqrt{4\pi\, t})^N}$, on peut observer que sa transformée de Fourier (en x) est:

$$\hat{E_t}(\xi) = e^{-t\,|\xi|^2}.$$

On a donc un produit de deux transformées de Fourier, qui est égal à la transformée de Fourier du produit de convolution (en x). Ainsi,

$$\tilde{u}(t,\xi) = \widetilde{u_0 * E_t}(\xi)$$

On obtient donc l'égalité des fonctions presque partout:

$$u(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\, t})^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

Il reste à vérifier que l'on a bien trouvé une solution.

Proposition : Si la fonction u_0 est continue, bornée et intégrable, alors la fonction u donnée par :

$$u(t,x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi\, t})^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$ et vérifie l'équation de la chaleur. De plus u est continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$, et $u(0,\cdot) = u_0$.

Remarque : Si on suppose juste que u_0 bornée et intégrable, on a seulement que $u(t,.)$ converge vers u_0 dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ quand t tend vers 0. Enfin si u_0 est seulement bornée, alors on doit se contenter de la convergence presque partout de $u(t,x)$ vers $u_0(x)$ quand t tend vers 0.

Preuve : En utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme dans les domaines $]\varepsilon,+\infty[\times\mathbb{R}^N$, on montre que u est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$. On en déduit aussi l'expression des dérivées partielles de u (on fait ici le calcul dans le cas N=1) :

$$\partial_t u = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{-1}{t\,\sqrt{4\pi\, t}} + \frac{|x-y|^2}{4\,t^2\,\sqrt{4\pi\, t}}\Big)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

et

$$\partial_x u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{-(x-y)}{2\, t}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy,$$

$$\partial_{xx} u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{-1}{2\, t} + \frac{|x-y|^2}{4\, t^2}\right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy.$$

Ainsi $(\partial_t - \partial_{xx})\, u(t,x) = 0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
Enfin, comme $\int_{\mathbb{R}^N} E_t(x)dx = 1$, on a :

$$u(t,x) - u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\sqrt{4\pi\, t})^N} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\, (u_0(x-y) - u_0(x))\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}}\, (u_0(x - \sqrt{2\, t}\, y) - u_0(x))\, dy,$$

et on conclut par convergence dominée, car u_0 est bornée et continue.

6.3 Exercices

Exercice 1 : On considère l'EDP du premier ordre

$$\partial_t u(t,x) + (x+t)\, \partial_x u(t,x) = (1+x+t)\, u(t,x), \qquad (E)$$

munie de la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$.

1. Calculer la fonction $\phi_{x_0}(t)$ définie par l'équation différentielle

$$\phi'_{x_0}(t) = \phi_{x_0}(t) + t,$$

munie de la condition de Cauchy $\phi_{x_0}(0) = x_0$.

2. Soit u une solution (de classe C^1) de (E). On pose $\eta_{x_0}(t) = u(t, \phi_{x_0}(t))$. Trouver une équation différentielle (et une condition de Cauchy) satisfaite par η_{x_0}. Résoudre ce problème de Cauchy.

3. En déduire une formule explicite pour la solution de (E). Vérifier que cette formule fournit effectivement une solution.

Exercice 2 : *La solution élémentaire de l'équation de la chaleur*

1. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$(\partial_t - \Delta_x)\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi\, t}}\right) = 0.$$

2. Montrer que pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

$$< (\partial_t - \Delta_x)(1_{t>0} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi\, t}}), \phi >$$

$$= -\Big[\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi\, t}} \phi \, dx \Big]_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi\, t}} (-\partial_t - \Delta_x) \phi \, dx dt.$$

3. Montrer que pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

$$< (\partial_t - \Delta_x)(1_{t>0} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi\, t}}), \phi >$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{|y|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \phi(\varepsilon, \sqrt{2\varepsilon}\, y) \, dy + O(\varepsilon).$$

En déduire la solution élémentaire de l'équation de la chaleur.

Exercice 3 : *L'équation des ondes en dimension 1*

Soit u une solution régulière et à décroissance suffisamment rapide dans la variable x de l'équation

$$\partial_{tt} u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0, \qquad (O)$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$\partial_t u(0,x) = u_1(x).$$

1. Montrer que la transformée de Fourier en x de u (notée $\hat{u}$) est donnée par la formule

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \, \cos(t\xi) + \hat{u}_1(\xi) \, \frac{\sin(t\xi)}{\xi}.$$

2. Calculer la transformée de Fourier des distributions $\frac{1}{2}(\delta_t + \delta_{-t})$ et $1_{[-t,t]}$.

3. Montrer que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(z) \, dz$$

est "la" solution de l'équation des ondes (O).

Exercice 4 : *L'équation des ondes en dimension 3*

Pour $t > 0$, on définit $\delta_{|x|=t}$ comme élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ à l'aide de la formule

$$< \delta_{|x|=t}, \phi >= \int_{\sigma \in S^2} \phi(t\, \sigma)\, d\sigma,$$

pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

1. Montrer que

$$\mathcal{F}(\delta_{|x|=t}) = T_{\xi \to 4\pi \text{ sinc } (t\,|\xi|)}.$$

2. En déduire "la" solution de l'équation des ondes en dimension 3

$$\partial_{tt} u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0, \qquad (O3)$$

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$\partial_t u(0,x) = u_1(x),$$

en utilisant une dérivée en temps pour le terme faisant intervenir u_0 (on ne cherchera pas à justifier les calculs).