ACTIVITE RECENTE DE RECHERCHE

Laurent DESVILLETTES

,

1. Equations cinétiques

Ce sont des équations apparaissant dans de très nombreux domaines de la physique mathématique (plasmas, gaz raréfiés, physique statistique, etc.) et dont la particularité est d'utiliser comme inconnue la densité $f(t, x, v)$ dans l'espace des phases (et non la densité $\rho(t, x)$ dans l'espace physique). Elles s'écrivent sous la forme générale

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f),$$

où Q est un opérateur (intégral, différentiel, etc.) agissant sur la variable v.

1.1 Structure des opérateurs de collision de Boltzmann et Landau

Lorsque l'on s'intéresse aux collisions entre particules, Q est un opérateur quadratique. L'étude mathématique de la structure des opérateurs de collision les plus importants (celui de Boltzmann pour les gaz raréfiés, et celui de Landau pour les plasmas) est un sujet très actif depuis les années 90. J'ai récemment travaillé sur la dissipation d'entropie de l'opérateur de Landau dans le cas Coulombien (il s'agit du cas le plus important pour la physique), afin d'en extraire des résultats de régularité pour l'équation de Landau (qui étaient connus dans des cas moins proches de la physique), cf. [6]. En collaboration avec K. Carrapatoso, on essaie maintenant d'en tirer des conclusions sur le comportement en temps grand de l'équation de Landau.

1.2 Equations de Vlasov-Poisson

Lorsque l'on considère que les particules interagissent par l'intermédiaire d'un champ moyen plutôt qu'à travers des processus de collision, on aboutit pour les plasmas (et pour les galaxies, lorsque l'interaction est gravitationnelle) à un autre type d'équations cinétiques: l'équation de Vlasov-Poisson. Le cas des données initiales mesures (correspondant par exemple à un trou noir central dans une galaxie) a récemment retenu l'attention des mathématiciens. En collaboration avec E. Miot et C. Saffirio (cf. [10]), on a étendu la théorie des années 90 due à P.-L. Lions et B. Perthame à ces données initiales. On espère maintenant traiter le cas gravitationnel.

2. Equations de réaction-diffusion en dimension finie et infinie

Il s'agit d'une classe d'équations très large, incluant des systèmes de la forme

$$\partial_t U - \Delta_x f(U) = g(U),$$

où U est une inconnue vectorielle, le plus souvent de dimension finie, mais parfois de dimension infinie. Ces équations apparaissent naturellement en biologie (dynamique des populations, biologie cellulaire), chimie, géométrie, etc.

2.1 Limites asymptotiques des équations de réaction-diffusion

Des petits paramètres apparaissent souvent dans les systèmes de réaction-diffusion, correspondant à des phénomènes physiques bien identifiés (quasi-stationarité). Dans des travaux en commun avec J. Canizo et K. Fellner (cf. [5]), on met en commun des méthodes d'entropie, de dualité, et de Meyers pour améliorer la théorie de la régularité des systèmes de réaction-diffusion. On essaie maintenant d'adapter ces méthodes dans le cadre des limites asymptotiques (où un petit paramètre tend vers 0).

2.2 Diffusion croisée

Lorsque la fonction $f(U)$ apparaissant dans un système de réaction-diffusion n'est pas de la forme $(f_1(u_1), ..., f_n(u_n))$, on dit que la diffusion est croisée. L'irruption des méthodes d'entropie (en particulier issues de la théorie des équations cinétiques) au milieu des années 2000 a permis un développement très important de la théorie de ces équations, cf. [8, 9]. Dans le cadre de la thèse en cours d'A. Trescases, on continue d'explorer cette classe d'équations.

2.3 Coalescence-fragmentation

Le cas le plus important dans lequel l'inconnue U est de dimension infinie est celui des équations de coalescence-fragmentation. Avec J. Canizo et K. Fellner (cf. [4]), on a obtenu grâce aux méthodes de dualité un théorème de non-gélation (i.-e. d'absence de singularités) lorsque dans ces équations, les taux de diffusion sont bornés inférieurement. On espère maintenant améliorer les résultats très partiels du cas où les taux de diffusion tendent vers 0, qui est plus proche de la physique.

2.4 Ondes progressives forcées

Une grande partie des travaux sur les ondes progressives concerne des EDP de réaction-diffusion dans lesquelles la vitesse de propagation des ondes n'est pas fixée a priori. Récemment, des travaux dus en particulier à H. Berestycki et O. Diekmann montrent l'intérêt de l'étude des ondes à vitesse de propagation fixée, en particulier dans l'étude des effets du changement climatique. Dans le cadre d'une collaboration avec ces auteurs (cf. [1]), on explore le cas des systèmes de plus d'une équation (qui sont mieux adaptés à la description de la complexité de la biodiversité).

2.5 Méthodes de démonstration rigoureuse assistée par ordinateurs

Ces méthodes, basées sur une projection en dimension finie (par exemple dans le cadre de séries de Fourier) d'une EDO et d'un contrôle rigoureux de toutes les erreurs (troncature, arrondis), permettent de rendre quantitatifs des résultats issus de méthodes topologiques ou variationnelles. Dans le cadre de la thèse de M. Breden, en cotutelle avec J.-P. Lessard de l'Univ. Laval à Quebec, on montre comment elles peuvent être généralisées à l'étude des solutions stationnaires des systèmes de réaction-diffusion. On tente maintenant de s'extraire des séries de Fourier pour utiliser d'autres bases Hilbertiennes, conduisant au traitement d'opérateurs asymptotiquement tridiagonaux et non diagonaux (cf. [3]).

3. Equations de la mécanique des fluides

Ce sont les variantes et extensions des équations d'Euler ou de Navier-Stokes de la mécanique des fluides compressibles ou incompressibles, par exemple, pour un fluide visqueux incompressible soumis à une force F (par unité de densité):

$$\partial_t u - u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \nu \, \Delta_x u + F,$$

$$\nabla_x \cdot u = 0,$$

où $u \in \mathbb{R}^3$ et $p \in \mathbb{R}$ sont les vitesses et pression associées au fluide.

3.1 Couplage entre équations fluides et cinétiques

Les applications à la théorie des aérosols (gouttelettes en suspension dans un gaz) motivent l'étude du couplage entre équations fluides (du type Navier-Stokes incompressible par exemple) et équations cinétiques du type Vlasov (à travers une traînée F proportionnelle à la vitesse relative du gaz et des gouttelettes). Si la théorie de l'existence et de la régularité des solutions à ce couplage est intéressante (cf. [2] par exemple), la question de la dérivation de ce couplage (par exemple à partir de systèmes de particules) s'impose maintenant comme un des problèmes mathématiques de base pour les aérosols. Les travaux déjà réalisés avec F. Golse et V. Ricci (cf. [7]) sont actuellement poursuivis, dans l'esprit des travaux qui lient par une asymptotique la théorie des gaz raréfiés et celle des équations de Navier-Stokes incompressibles.

3.2 Mélanges de gaz raréfiés et équations de Navier-Stokes compressibles

L'étude des gaz raréfiés de la haute atmosphère demande l'établissement d'un lien bien mathématisé entre les équations de Boltzmann pour des mélanges de gaz monoatomiques et polyatomiques d'une part, et les équations de Navier-Stokes des mélanges de fluides compressibles d'autre part. Ce travail est en cours en collaboration avec C. Baranger, M. Bisi et S. Brull.

References

[1] Henri Berestycki, Laurent Desvillettes et Odo Diekmann: *Can climate change lead to gap formation ?* Accepté pour publication à Ecological Complexity, special issue.

[2] Laurent Boudin, Laurent Desvillettes, Céline Grandmont et Ayman Moussa: *Global Existence of Solutions for the Coupled Vlasov and Navier-Stokes Equations*, Differential and Integral Equations, **22**, n.11-12, (2009), 1247–1271.

[3] Maxime Breden, Laurent Desvillettes et Jean-Philippe Lessard: *Rigorous numerics for nonlinear operators with tridiagonal dominant linear parts.* Accepté pour publication à Discrete and Continuous Discrete Systems.

[4] Jose Alfredo Canizo, Laurent Desvillettes et Klemens Fellner: *Regularity and mass conservation for discrete coagulation-fragmentation equations with diffusion*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non-linéaire, **27**, n.2, (2010), 639–654.

[5] Jose Alfredo Canizo, Laurent Desvillettes et Klemens Fellner: *Improved duality estimates and applications to reaction-diffusion equations*, Communications in Partial Differential Equations, **39**, n.6, (2014), 1185–1204.

[6] Laurent Desvillettes: *Entropy dissipation estimates for the Landau equation in the Coulomb case and applications.* Preprint arXiv:1408.6025.

[7] Laurent Desvillettes, François Golse et Valeria Ricci: *The Mean-Field Limit for Solid Particles in a Navier-Stokes Flow*, Journal of Statistical Physics, **131**, n.5, (2008), 941–967.

[8] Laurent Desvillettes, Thomas Lepoutre et Ayman Moussa: *Entropy, Duality and Cross Diffusion*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **46**, n.1, (2014), 820–853.

[9] Laurent Desvillettes, Thomas Lepoutre, Ayman Moussa, et Ariane Trescases: *On the entropic structure of reaction-cross diffusion systems.* Accepté pour publication à Communications in Partial Differential Equations.

[10] Laurent Desvillettes, Evelyne Miot et Chiara Saffirio: *Polynomial propagation of moments and global existence for a Vlasov-Poisson system with a point charge*, Annales de l'IHP, Analyse Non-Linéaire, online 15 jan. 2014.